Historie matematiky a informatiky
Cvičení 4

Doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph. D.,

KAM, FIT ČVUT v Praze

2014

Evropský sociální fond

Investujeme do vaší budoucnosti

Čísla speciálních tvarů a jejich vlastnosti 1

Alena Šolcová

Čísla speciálních tvarů

- Dokonalá čísla (Perfect Numbers)
- Mersennova čísla (Mersenne Numbers)
- Spřátelená čísla (Amicable Numbers)
- Fermatova čísla (Fermat Numbers)
- Fibonacciova čísla atp.
- Speciální prvočísla –

  palindromická, prvočísla Sophie Germainové.

Vlastnosti Fermatových prvočísel, příklady aplikací.

Dokonalá čísla

Perfect Numbers

Pýthagorejci

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Definice: Kladné celé číslo *n* je dokonalé, je-li rovno součtu všech kladných dělitelů vyjma sebe sama.

Řekové znali pouze 4 čísla: 6, 28, 496, 8128.

Nikomachos z Gerasy (Introductio Arithmeticae) okolo 100 n.l. – vytvořil matematickou teorii, zavedl čísla spřízněná (spřátelená), společenská, abundantní, deficientní.

Vlastnosti dokonalých čísel

- *n* je dokonalé, když je počet kladných dělitelů

$$\sigma(n) - n$$

- *n* je dokonalé, když $\sigma(n) = 2n$

- Hypotézy:
   1. *n* –té dokonalé číslo má právě *n* cifer.
   2. Každé dokonalé číslo končí střídavě buď číslicí 6 nebo 8.

Obě hypotézy jsou vyvráceny:

Nemáme dokonalé číslo s 5 číslicemi

$P_5 = 33550336 = 2^{12} \,.\, 8191 = 4096 \,.\, 8191 = 4096 \,.\, (2^{13} - 1)$

(nalezeno již v anonymním rukopisu v 15. století),

$P_6 = 8589869056 = 2^{16} \,.\, 131071 = 65536 \,.\, 131071 = 65536 \,.\, (2^{17} - 1)$

(Cataldi, 1603)

Obě dokonalá čísla po sobě následující končí číslicí 6.

Obecný tvar dokonalého čísla

Eukleidés dokazuje:

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ \ldots\ + 2^{k-1} = p$ je prvočíslo, pak $2^{k-1}\, p$ je dokonalé číslo (nutně sudé). IX. Kniha – Základy

Příklady: 1 + 2 + 4 = 7 je prvočíslo, tedy 4 . 7 = 28 je dokonalé.

Eukleidés používá součet geometrické řady

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ \ldots\ + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

(lze najít ve starších pýthagorejských textech)

Pak z toho plyne: Je-li $2^k - 1$ prvočíslo ($k > 1$), pak

$n = 2^{k-1}\,(2^k - 1)$ je dokonalé.

Důkaz, že každé sudé dokonalé číslo je tohoto tvaru, až za 2000 let.

Lemma

- Je- li $a^k - 1$ prvočíslo ($a > 0$, $k \geq 2$), pak $a = 2$ a k je také prvočíslo.

Příklady: Pro $p = 2, 3, 5, 7$ hodnoty $2^p - 1$ jsou prvočísla 3, 7, 31, 127.

Pak $2\,(2^2 - 1) = 6$

$2^2(2^3 - 1\,) = 28$

$2^4\,(2^5 - 1\,) = 496$

$2^6\,(2^7 - 1\,) = 8128$

jsou všechna dokonalá čísla.

Ale platí to vždy?

Je vždy $2^p - 1$ prvočíslo?

- Mnoho matematiků si domnívalo, že odpověď je kladná.
- 1536 – Hudalrichus Regius v *Utriusque Arithmetices* nalezl pěkný rozklad

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 . 89$$

Poslední číslice sudého dokonalého čísla

- Věta:

Sudé dokonalé číslo *n* končí číslicí 6 nebo 8, tj.

$n \equiv 6 \pmod{10}$ nebo $n \equiv 8 \pmod{10}$.

V důkazu se užije lemmatu a předcházející věty.

Zadáme si dvě úlohy k zamyšlení:

Lámejte si hlavu L4, L5

- L 3. Dokažte, že přirozené číslo

  $n = 2^{10}(2^{11} - 1)$ není dokonalé číslo,

  tj. $\sigma(n) \neq 2n$.

  (Návod: $2^{11} - 1 = 23 \,.\, 89$.)

- L 4. Najdi dvě poslední cifry dokonalého čísla

$$n = 2^{19936}(2^{19937} - 1)$$

Existuje liché dokonalé číslo?

Jeden z nejstarších otevřených problémů!

- René Descartes – NE
- James Joseph Sylvester , 2. pol. 19. stol.– pochybuje, muselo by vyhovovat vysokému počtu požadavků.
- Pokud existuje, víme o něm:
  - Bude mít nejméně 8 rozdílných prvočíselných dělitelů, z nichž jeden je větší než milión.
  - Bude mít nejméně 300 číslic.

Mersennova čísla

- Čísla tvaru $M_n = 2^n - 1$ tradičně nazýváme Mersennova podle P. Marina Mersenna.
- Pokud jsou čísla M_n prvočísla, mluvíme o Mersennových prvočíslech.
- P. Marin Mersenne

  (1588 – 1648),
- člen řádu minimů,
- zakladatel Pařížské akademie,
- získal vzdělání v jezuitské koleji

  La Flèche jako René Descartes.

Spřátelená čísla

Amicable Numbers or Friendly Numbers

- Dvojice čísel, pro něž je součet dělitelů každého z nich roven druhému číslu.
- Nejmenší spřátelená čísla jsou 220 a 284.
- Součet dělitelů čísla 220 je:

  1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284
- Součet dělitelů čísla 284 je:

  1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220

Thabitova věta

- Thabit ibn Qurra, 9. století:

Věta: Jsou-li 3 čísla

$$p = 3 \,.\, 2^{n-1} - 1,\ q = 3 \,.\, 2^{n} - 1,\ r = 9 \,.\, 2^{2n-1} - 1$$

prvočísly, pak $2^n \,.\, p \,.\, q$ a $2^n\, r$ jsou spřátelená čísla.

1636 – v dopise Mersennovi oznamuje Pierre de Fermat, že našel čísla 17 296 a 18 416 jako spřátelená čísla.

1638 – v dopise Mersennovi píše René Descartes, že našel další dvojici použitím Thabitovy věty: 9363584 a 9437056.

Fermat: $n = 4$, $p = 23$, $q = 47$, $r = 1151$, p, q, r jsou prvočísla.

Descartes: $n = 7$, $p = 191$, $q = 383$, $r = 73727$, p, q, r jsou prvočísla.

Další spřátelená čísla

- 18. století

Leonhard Euler našel 64 dvojic spřátelených čísel.

2 dvojice byly později odhaleny jako nespřátelené.

(1909, 1914).

1830 – Adrien Maria Legendre – nalezl další dvojici:

2 172 649 216 a 2 181 168 896.

Dnes – nalezeno více než 50 000 dvojic.

Není známé pravidlo pro nalezení všech spřátelených dvojic.

Euler položil otázku:

Zda existuje dvojice spřátelených čísel, z níž jedno číslo je sudé a jedno liché. Odpověď není dosud známa.

Nejspřátelenější čísla

“Most“ amicable numbers

Obě čísla spřátelené dvojice jsou sudá a mají součet dělitelný 9.

Příklad: $220 + 284 = 504 \equiv 0 \pmod 9$.

Nejmenší známá dvojice, která nemá tuto vlastnost , je

666030256 a 696630544.

Deficientní a abundantní čísla

Deficient Numbers and Abundant Numbers

Čísla, která nejsou dokonalá,

jsou deficientní nebo abundantní.

Definice:

- Přirozené číslo je deficientní, je-li $\sigma(n) < 2n$.

- Přirozené číslo je abundantní, je-li $\sigma(n) > 2n$.

Deficientní a abundantní čísla