Úlohy k procvičení

Soubor úloh má čtyři části po třech příkladech. Bod získáte, jestliže z každého oddílu vyřešíte správně alespoň 1 úlohu.
Řešení odevzdejte v písemné podobě na cvičení, nejpozději do 7. května 2014.

Vzor A: Určete, zda dané zobrazení je lineární:

$L : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^4; \qquad L(ax+b) = [3b-2a, 0, 0, b-2a].$

Řešení: Ověříme vlastnosti linearity:
a) homogenita $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathcal{P}_1 : L(\alpha u) = \alpha L(u)$:

$$L(\alpha(ax+b)) = L(\alpha ax + \alpha b) = [3\alpha b - 2\alpha a, 0, 0, \alpha b - 2\alpha a] =$$

$$= [\alpha(3b-2a), \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0, \alpha(b-2a)] = \alpha[3b-2a, 0, 0, b-2a] = \alpha L(u).$$

b) aditivita $\forall u, v \in \mathcal{P}_1 : L(u+v) = L(u) + L(v)$:

$$L((ax+b)+(cx+d)) = L((a+c)x + (b+d)) =$$

$$= [(3(b+d) - 2(a+c)), 0, 0, (b+d) - 2(a+c)] =$$

$$= [(3b - 2a) + (3d - 2c), 0, 0, (b - 2a) + (d - 2c)] =$$
$$= [3b - 2a, 0, 0, b - 2a] + [3d - 2c, 0, 0, d - 2c] = L(ax + b) + L(cx + d).$$

Obě vlastnosti jsou splněny, zobrazení je tedy lineární.

Příklad A1: Určete, zda je dané zobrazení lineární:

$L : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^4; \quad L(ax^2 + bx + c) = [a + 2b, c - 3a, b + a + 1, a - b + c]^T$
pro každé $ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$.

Příklad A2: Určete, zda je dané zobrazení lineární:

$K : \mathcal{M}_{2,3} \to \mathbb{R}^2; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \end{pmatrix}$
pro každou matici $A \in \mathcal{M}_{2,3}$.

Příklad A3: Určete, zda je dané zobrazení lineární:

$L : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^4; \quad L(ax^2 + bx + c) = [2a + b, c, a^2 + b + c, bc]^T$
pro každé $ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$.

Vzor B: Najděte úhel mezi vektory a, b a jejich velikosti, je-li o vektorech známo:

$a = 3u - 2v + w,\ \ b = u + 2w,\ \ \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$, vektory u, v, w vzájemně svírají úhel $120°$.

Návod: Využijeme rovnosti $(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°$

$$(a, b) = (3u - 2v + w, u + 2w) =$$
$$= 3(u, u) - 2(v, u) + (w, u) + 6(u, w) - 4(v, w) + 2(w, w) =$$
$$= 3\|u\|^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2\|w\|^2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\|a\|^2 = (a, a) = 9(u, u) + 4(v, v) + (w, w) - 12(u, v) - 4(v, w) + 6(u, w) =$$
$$14 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$
$$\|b\|^2 = (b, b) = (u, u) + 4(w, w) + 4(u, w) = 5 + 2 = 7.$$

Pro úhel φ mezi vektory a a b platí $\cos\varphi = \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{11}{42}\sqrt{7}$.

Příklad B1: Najděte úhel mezi vektory a, b a jejich velikosti, je-li o vektorech známo:

$a = 2u + w,\ \ b = v - 4w,\ \ \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$, vektor u je kolmý na v, úhel mezi v a w je 60° a mezi u a w je 120°.

Příklad B2: Najděte úhel mezi vektory a, b a jejich velikosti, je-li o vektorech známo:

$a = u - v,\ \ b = u - w,\ \ \|u\| = \|v\| = 1$, vektor u je kolmý na v, $w = 3u + v$.

Příklad B3: Najděte úhel mezi vektory a, b a jejich velikosti, je-li o vektorech známo:

$a = 2u - v + 5w,\ \ b = u + v$, vektory u, v, w, z jsou spojnice vrcholů pravidelného čtyřstěnu o délce hrany $2\sqrt{2}$ s jeho těžištěm.

Poznámka: Rozmyslete si, jaký útvar ve čtyřrozměrném prostoru vytvoří konvexní obal bodů [1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]. A jakou bude mít délku strany? Těžiště je aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů.

Vzájemná poloha variet

Příklad C1: Vyšetřete vzájemnou polohu variet $V_1 \in \mathbb{R}^4$, $V_2 \in \mathbb{R}^4$

$$V_1 : x - 2y + 3z - 2w = 3$$
$$V_2 : \langle (4,1,1,1), (0,0,3,3), (14,4,-1,0) \rangle$$

Příklad C2: Vyšetřete vzájemnou polohu variet $V_1 \in \mathbb{R}^4$, $V_2 \in \mathbb{R}^4$

$$V_1 : \begin{aligned} -2x + y + z + w &= 1 \\ x - y &= 0 \\ y + w &= 2 \end{aligned}$$

$$V_2 : \begin{aligned} x &= -1 + s \\ y &= r \\ z &= 2 + r - s \\ w &= -r - 2s \end{aligned}$$

Příklad C3: Vyšetřete vzájemnou polohu variet $V_1 \in \mathbb{R}^4$, $V_2 \in \mathbb{R}^4$.

V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ určete, kdy jsou variety V_1, V_2
a) rovnoběžné, b) různoběžné.

$$\begin{aligned} V_1 : 2x - y + 3z - w &= 1 \\ x + 2y - z + w &= 2 \\ V_2 : \langle (1,1,0,0), (1,\beta,1,5) \rangle & \end{aligned}$$

Zopakujme si ještě řešení soustav lineárních rovnic. Znáte několik metod (GEM, Cramerovo pravidlo,...) – můžete je porovnat.

Příklad D1: Řešte soustavu lineárních rovnic s parametry $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + 2x_3 &= 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 &= 1 \\ ax_1 + 2bx_2 + (b+3)x_3 &= 2b - 1 \end{aligned}$$

Příklad D2: Řešte soustavu lineárních rovnic s parametry $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

Příklad D3: Řešte soustavu lineárních rovnic s parametry $a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + ax_2 + 0x_3 + ax_4 &= p \end{aligned}$$