Aritmetika a algebra středověku
Nástroje k výpočtům a k řešení otázek filosofických a etických

doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií ČVUT v Praze

2021

Přehled přednášky

- Tradice – arabská matematika
- Ruka - první počítač
- Abakus Gerberta z Aurillacu
- Metoda pro násobení - gelosia
- Universální jazyk a stroj Raymunda Llula
- Zairja, Ibn Khaldun - použití algoritmu
- Al Tusí – přístroj zvaný „dvojice“
- Thabit ibn Qurra, Johannes Šindel a teorie čísel
- Nákres Leonarda da Vinci
- Schickardovy počítací hodiny
- Napierovy hůlky

Tradice

- Antické prameny
- Algebra a astronomie a **arabské země**
- Raný středověk

- **Boethius** (480 – 524/525) - **Institutio Arithmetica**, používána plně od 11. a 12. století – Zavedl **kvadrivium.**

Co je kvadrivium? Aritmetika, geometrie, astronomie a hudba.

- **Leonardo z Pisy, Kniha o abaku**, 1202, 1228
- **Ramon Llull, Raymondus Llulus** – **Ars magna** (1275)
- **Johannes Sacrobosco: Algorismus vulgaris** od 1230

Arabská civilizace

- Za vlády Abbasovců se matematické texty začaly překládat ze syrštiny, perštiny, řečtiny a indických jazyků.

Abbasovci

- **al Mansur** (754 – 775)
- **Harun al Rašid** (786 – 809)
- **al Mamun** (813 – 833)

„Roku 156. roce hidžry předstoupil před kalífa Al Mansura Ind, jenž byl dobře vycvičen v počtech zvaných sindhind, dle nichž se určují pohyby hvězd na nebi.
Měl také knihu, ve které stálo, jak se určuje zatmění Slunce, Měsíce a podobné věci.
Na to nařídil al Mansur, aby se toto dílo přeložilo.“

Dům moudrosti v Bagdadu

píše al Chvárizmí ve svém pojednání.

- **Roku 820** podal al Chvárizmí arabské zpracování knihy.

Al-Chvárizmí a algebra (al džebr, aljabr)

- **Al-Chvárizmí (též al Chorezmí, al Khwarizmi) al Mádžusí** – pracoval v knihovně chalífa al Mamúna – (780 – 850)
- **Díla** – tabulky **Sindhind**, Kniha astronomických tabulek, O slunečních hodinách, O používání astrolábu, O konstrukci astrolábu, Letopisy.

- Používal indických a babylónských pramenů.

- ***Algebraický traktát*** – zachován v původním arabském znění

*Muchtasar min hisál **al džebr** va l mukábala*
(Věda o redukci a vzájemném rušení) – volně přeloženo

- ***Aritmetický traktát*** - nezachoval se v původním arabském znění (Kniha o indickém počítání)

Aritmetický traktát – al Chvárizmí

- **Aritmetické operace** – sčítání, odčítání, půlení, zdvojování, násobení, dělení …
- Příklady jsou vybrány tak, aby se čtenář setkal i s takovými případy,
  s nimiž by si nemusel sám poradit (přechod přes desítku).
- **Výpočty prováděli na desce pokryté pískem.**
  Umožňovalo to během výpočtu mazat
  pomocné číslice a dílčí výpočty.
- Obratný počtář mohl např. při násobení dvou čísel na tabulce zaznamenaná jen dvě čísla. Jedno z nich přitom upravoval mazáním číslic a jejich nahrazováním jinými číslicemi.
- **Aritmetické operace byly prováděny od nejvyšších řádů,**
  tedy tak, jak je provádíme, když počítáme zpaměti,
  nikoliv tak, jak postupujeme při písemném počítání.

Aritmetický traktát – al Chvárizmí - příklad

- **Máme sečíst 887 a 352.**

  Al-Chvárizmí postupoval takto:

- 1. krok: 800 + 300 = 1100,
  nahradíme tedy druhé číslo číslem 1152.
- 2. krok: 80 +50 = 130,
  nahradíme tedy druhé číslo číslem 1232.
- 3. krok: 7 + 2 = 9,
  nahradíme tedy druhé číslo číslem **1239**,

  a to je hledaný součet.

Aritmetický traktát – al Chvárizmí

- **Půlit doporučuje od nejnižšího řádu,** zatímco zdvojovat od nejvyššího.
- **Násobení učí metodou indickou,** tj. při dělení se píše dělitel pod dělence a podíl nad něj.

- V závěru podotýká, že **Indové používali zlomky šedesátinné** a ukazuje, jak se s nimi počítá.
- **Rozeznává zlomky němé a vyslovitelné.**
- Vyslovitelné zlomky mají za jmenovatele čísla 1 – 9 a součiny 1x1 až 9x9.
- Němé zlomky mají ve jmenovateli 13, 17 … .

al Chvárizmí a rovnice

Rozlišuje 6 tvarů rovnic

1. $ax^2 = bx$ **2.** $ax^2 = c$ **3.** $bx = c$

4. $x^2 + bx = c$ **5.** $x^2 + c = bx$ **6.** $x^2 = c + bx$

a podává pravidla k jejich řešení.

Např.: Pátý typ $x^2 + c = bx$ řeší takto: Al-Chvárizmí řešení ukazuje na příkladu:
Čtverce a čísla se rovnají kořenům. Např. Čtverec a číslo 21 se rovnají 10 kořenům též čtverce, tedy: Jaký je obsah čtverce , který se rovná 10 kořenům svým, když se k němu přidá číslo 21.
Řeší se takto: Rozpůl počet kořenů , polovina ta jest pět. Znásob tuto polovinu samu sebou, obdržíš 25. Odečti číslo 21, zbudou ti 4. To odmocni a obdržíš 2. To odečti od polovičního počtu kořenů, tedy od 5 a obdržíš 3. To jest kořen hledaného čtverce a čtverec sám je 9.

Věz také, že úkol jest nemožný, jestliže druhá mocnina polovičního počtu kořenů je menší než číslo spojené se čtvercem etc. Vyjádřete …
****

Řešili jsme konkrétní úlohu: $x^2 + 21 = 10x$.
Neznámou pojmenoval **„šai“** (věc), kořen (odmocnina) je **„džidr“. Alchvárizmí věděl, že kvadratická rovnice má dva kořeny. Diofantos** to nikde neuvádí.

al Chvárizmí a měření

Vliv alexandrijských učenců:

Opakují se některé úlohy Herónovy: Např. Vepište čtverec do rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena mají 10 délek a základna 12 délek.

- **Herón** řeší úlohu tak, že součin výšky se základnou dělí součtem obou těchto délek a tak, aniž to nějak odůvodňuje, stranu čtverce vypočte.

- **Al Chvárizmí** považuje stranu čtverce za neznámou a vypočítává čtyři díly, na které se trojúhelník vepsaným čtvercem rozkládá, a ty pak srovnává se známou plochou celého trojúhelníka.

Pro číslo π používá dle indického způsobu pro praktický život $\pi = 22/7$, pro vědecké účely klade $\pi = \sqrt{10}$ nebo 62 832/20 000.

Abu Kamil (850 – 930), první žák

- Původně z Egypta.
- Je autorem díla
  se stejným názvem jako al-Chvárizmí.
- **Lze jej považovat za skutečného objevitele řešení kvadratických rovnic.**
  Používá symboly pro mocniny neznámých
  až do osmé (s výjimkou 7.)
  Aritmetizace objektů. Pracuje s kvadratickými iracionalitami jako s koeficienty v rovnicích.

O indických rašíkátech

- Obvyklým tématem algebraických textů v arabské matematice byla **trojčlenka a složená úměra.**

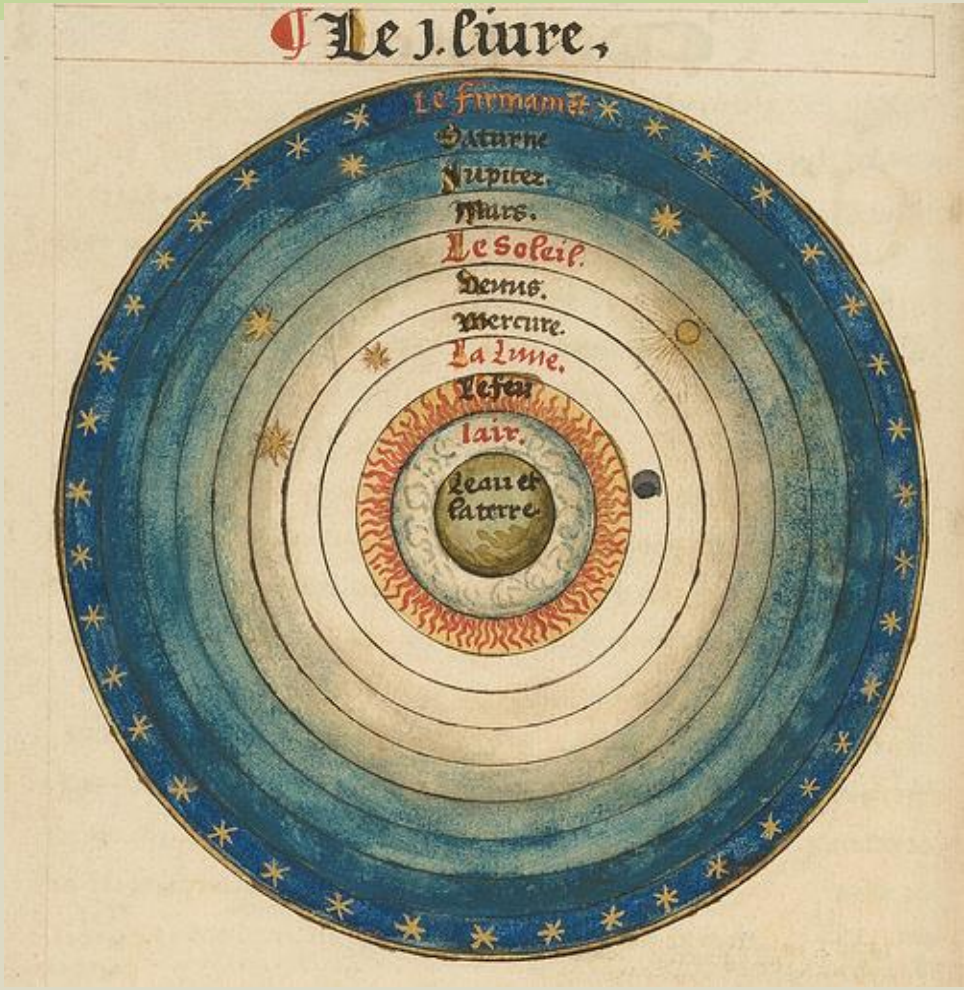
$$a : b = c : x = d : y = \ldots = h : w,$$

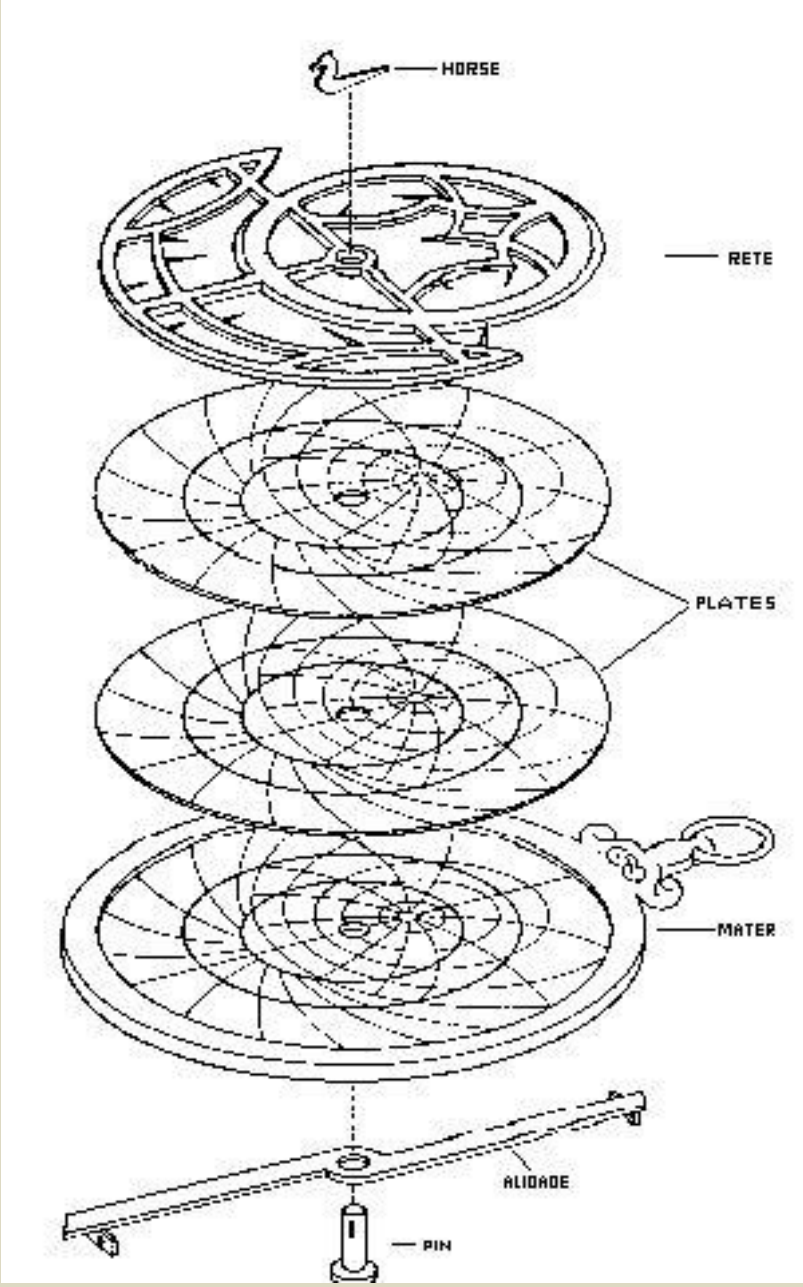
kde x, y, … , w jsou neznámé.

- **al Bírúní (973 – 1048)**

Kosmologické představy ve středověku

- **Omyl** – středověcí lidé věřili, **že Země je plochá** (s výjimkou Norů). Navíc **nevěřili, že hvězdy jsou pouhé body na obloze.**
- **Hvězdy považovali za větší než je Země.**
- **Isidor ze Sevilly v 6. století** věděl, že **Slunce je větší a Měsíc menší než Země.**
- **Maimonides ve 12. století** odhadl, že **každá hvězda je 9x větší než Země.**
- **Roger Bacon ve 13. století** jednoduše tvrdil, že **nejmenší hvězda je „větší“ než Země.**





Astroláb

- Astroláb je založen **na mapě Hipparchově**

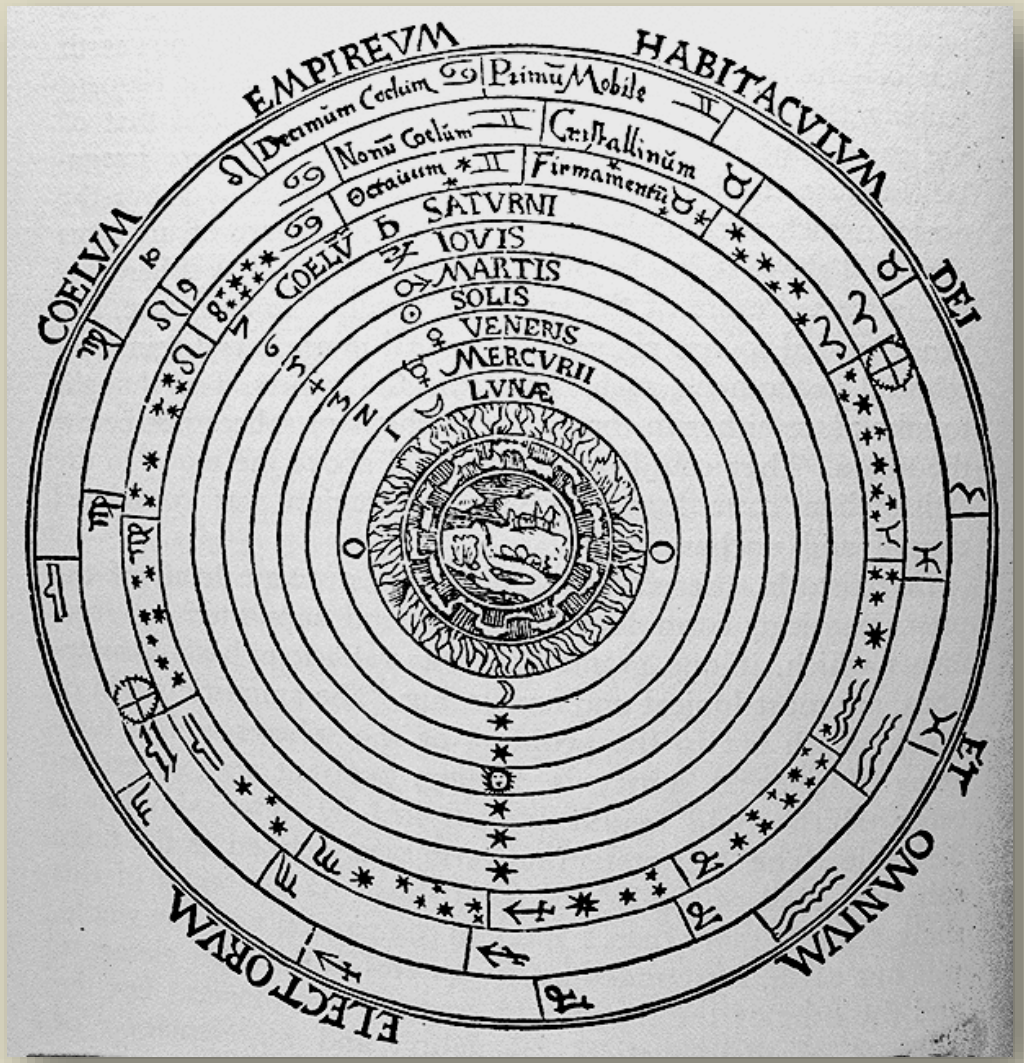
  150 př. n.
- **Části:**

  1. mater (základní deska),
  2. klimaty, tympanony (výměnné desky),
  3. rete (síť),
  4. koník, kobylka,
  5. alhidáda

(otočné zaměřovací pravítko).

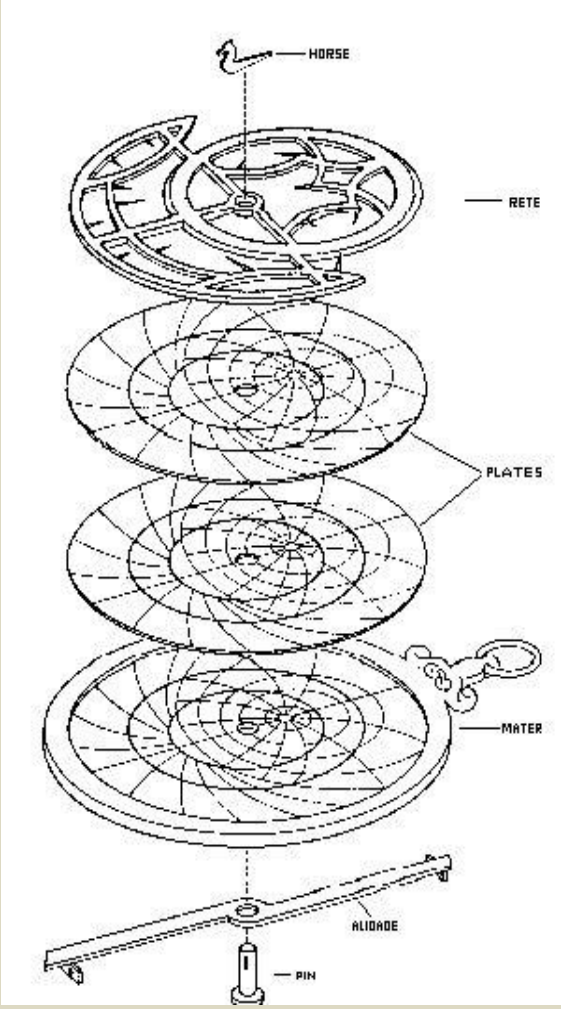
Kosmos ve středověku

- Prostorový svět „nekončí“ v trojdimenzionálním světě.
  Konec prostoru
  Světlo za materiálním univerzem je intelektuální světlo.
- **Člověk sídlí na Zemi ve středu konečného a sférického univerza zapouzdřeného ve věčnosti.**
  Středověcí lidé pozorovali hvězdy a planety, věděli, že jsou ve velké vzdálenosti, ale tato vzdálenost nebyla tak velká, aby je dovedla k nekonečnu.
  Nebyl to počátek neznámého nekonečna jako je to v případě našeho univerza.



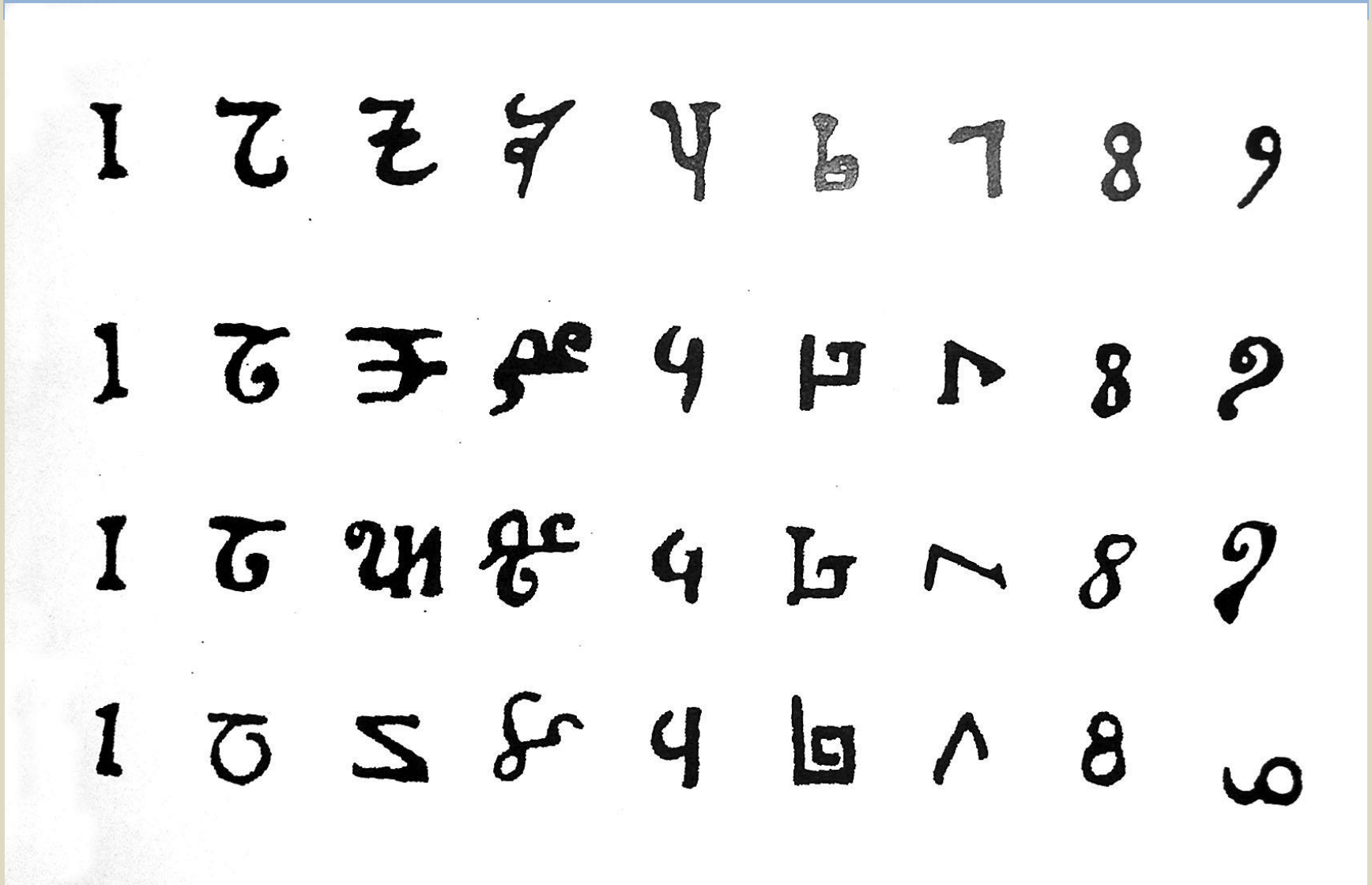
Aristotelský kosmologický model

K čemu používali naši předkové astrolábu?



- Nalezení času východu a západu Slunce → výpočet délky dne a noci
- Určení času ve dne i v noci
- Zaměřit nebeské objekty na obloze
- Určit aspekty horoskopu
- Předpovídat změny poloh hvězd a planet a dalších objektů viditelných na obloze (komet atp.)
- Vypočítat jaká část oblohy je viditelná v libovolném čase

Číslice gobar



Tradice

- **13. století - školy abaku**, na rozdíl od universit bez studia latiny studenti získavali znalosti z praktické matematiky

Maestri d'abbaco učebnice Trattati d'abbaco

Liveri del abbecho 1290 - nejstarší text

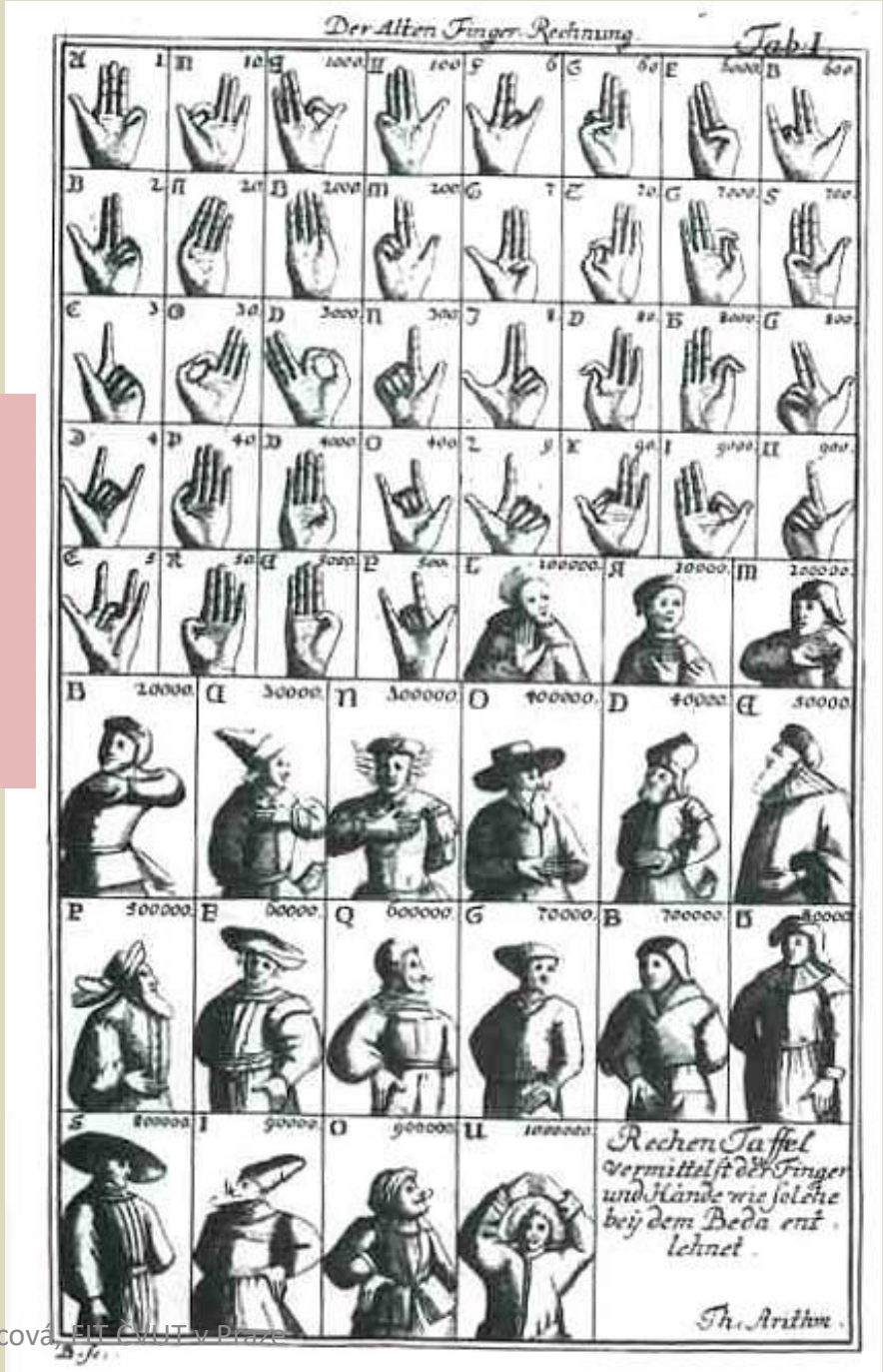
- **Hledání kořenů**, **řešení rovnic**, „cosa", quantita" - da Peretola
- 14. století – Florencie – centrum škol abaku
- **Regola de cosa**

Počítání podle Bedy

Béda Ctihodný (672-735)
Bede Venerabilis

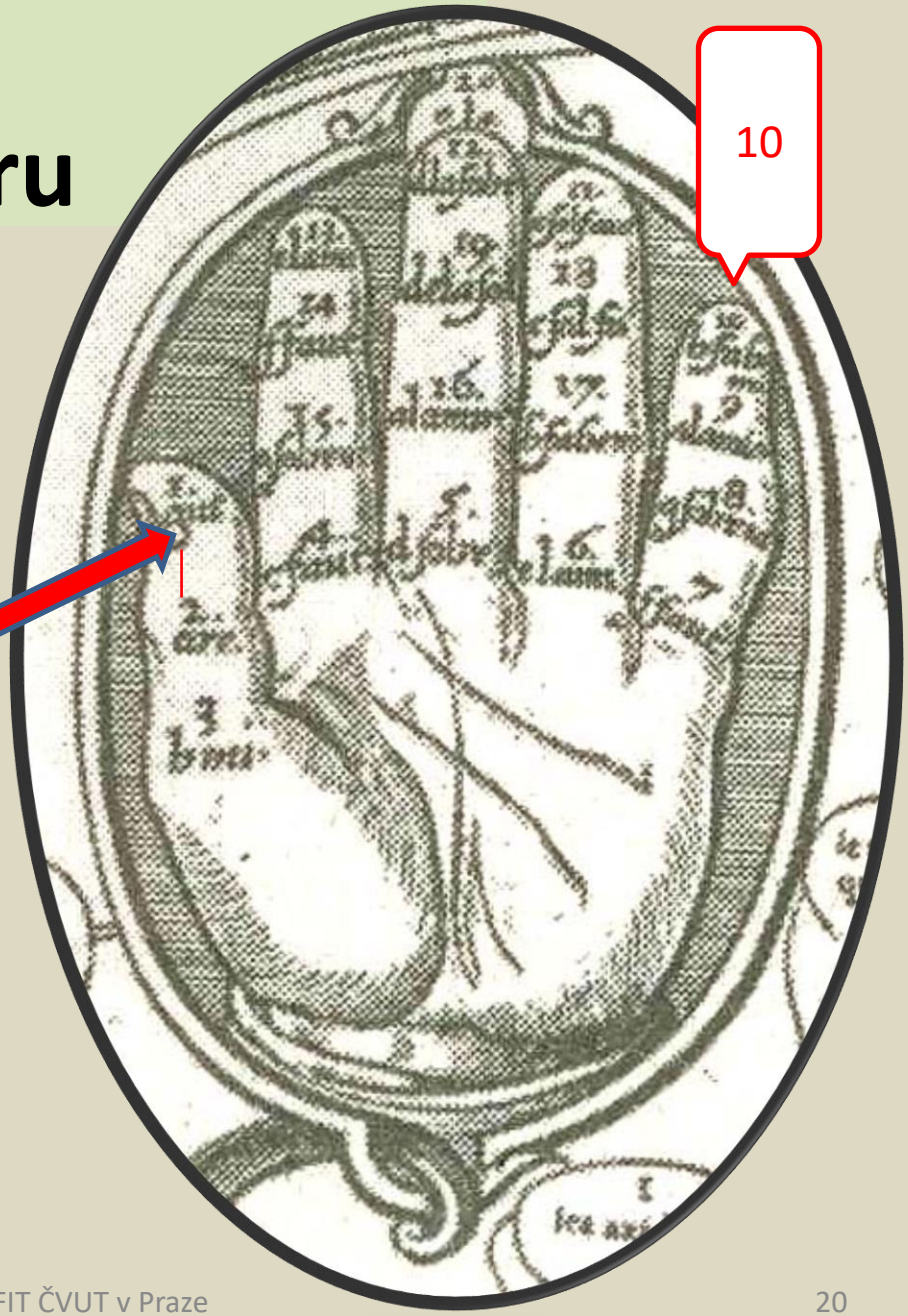
Výpočet kalendáře,
nepravidelných svátků - velikonoc

Ukažte 4, 5, 30, 40 …
Jak se liší 4 a 40?



Ruce v roli prvního kalkulátoru

- Ruka – jednoduchý kalkulátor a mnemonická pomůcka 1



Gerbert z Aurillacu

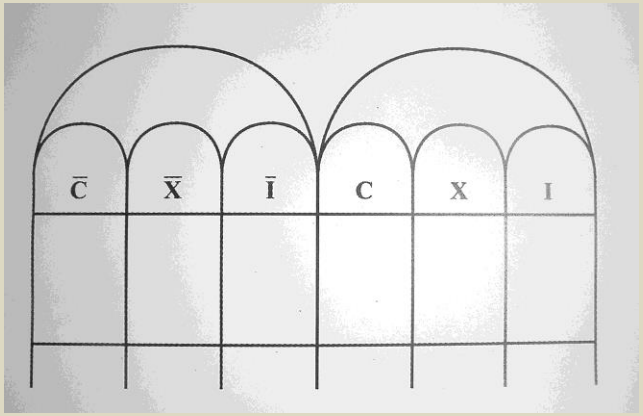
později **papež Silvestr II.** (+ 1003)

- Studoval v Cordobě, v Seville.
- Vedl katedrální školu v Remeši.
- **Co mezi Saracény studoval?**

Ptolemaiův astroláb, Firmicovy spisy o osudu

- Sestrojoval glóby, astroláby, počítadla a pozorovací trubice (předchůdce dalekohledu).
- Vynalezl i kyvadlové hodiny.
- Uvedl do západního světa arabské číslice.

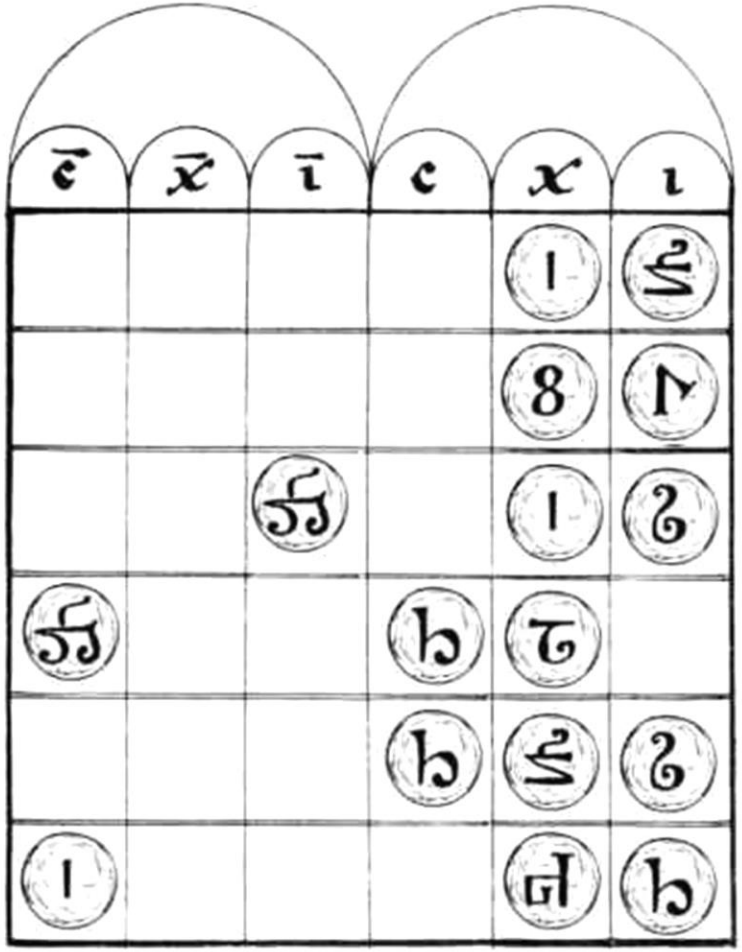
Gerbertův abakus - konvergence kultur



- Gerbert zavedl počítání s indicko-arabskými číslicemi na ploché rovné desce s nakreslenými sloupci pro jednotky, desítky, stovky …
- *apices* – z lesních rohů, žetony popsané číslicemi, umísťoval na desku.
- Nula nebyla nutná.

- Gerbert, *Regula de Abaco Computi,*
- přehled pravidel
- návod, jak sčítat, odčítat, násobit i dělit v novou metodou
- Přidružené dílo, *Liber Abaci*, Gerbertova studenta Bernelina je často zahrnováno mezi práce Gerbertovy.
- Předbíhá nejen stejným názvem, ale i obsahově o 200 let stejnojmenné dílo Fibonacciho.

Gerbertův abakus, Limoges 1030



13

87

4 019

400 520

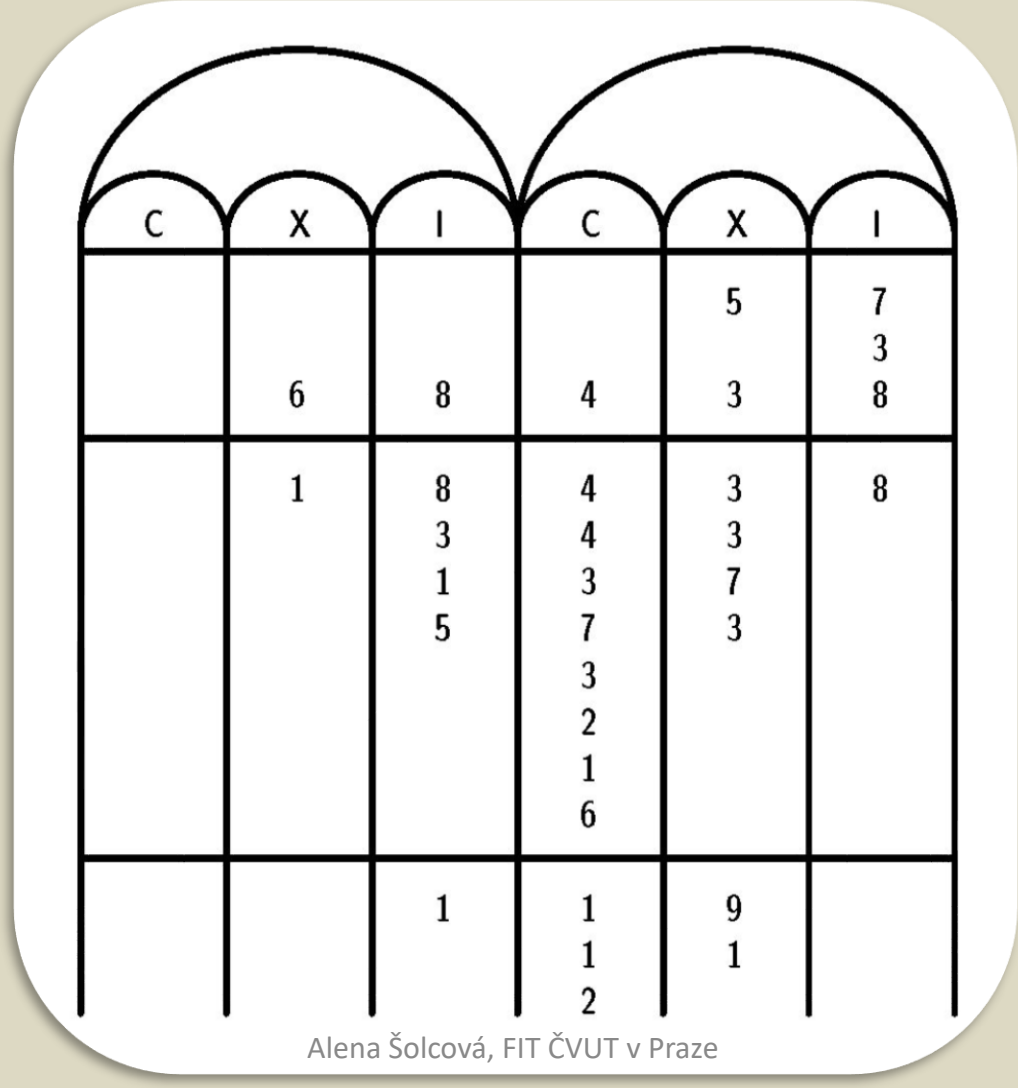
539

100 065

Fig. 241. – Le principe de représentation des nombres entiers au moyen des apices *sur l'abaque perfectionné de Gerbert et ses disciples (sur cet abaque, comportant 27 colonnes réunies de trois en trois, les* apices *prenaient une valeur de position variant selon la colonne où ils étaient disposés ; de plus, l'absence d'unités d'un certain rang y était signifiée en laissant vide la colonne correspondante).*

(Apices - Limoges avant 1030)

Gerbertův algoritmus pro dělení



Metoda gelosia

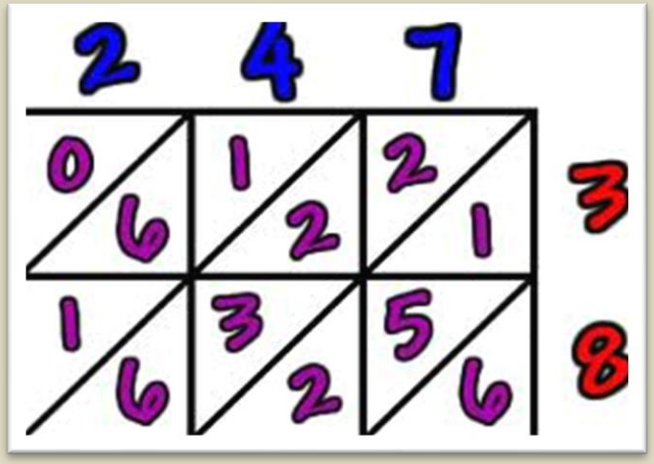
- **Benátské čtverce**, **Indická síť** – další názvy.
- Slouží k násobení nejen přirozených čísel, ale i desetinných zlomků.
- Rané zprávy o použití metody – v arabské matematice **Ibu al-Banna al Marrakushi** – 2. pol. 13. stol.

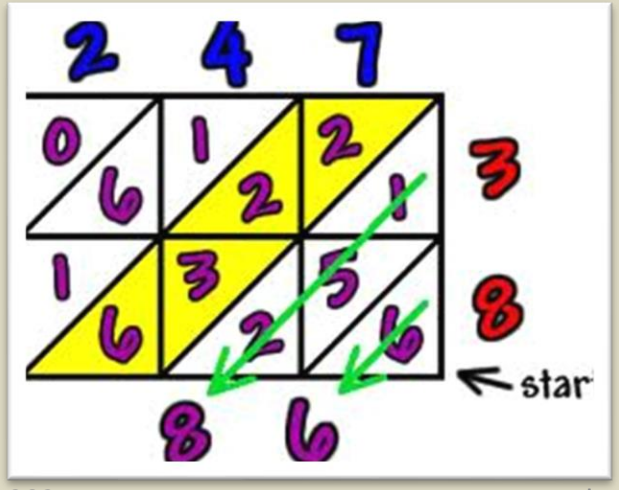
Leonardo z Pisy - Liber abaci – 1202, 1228

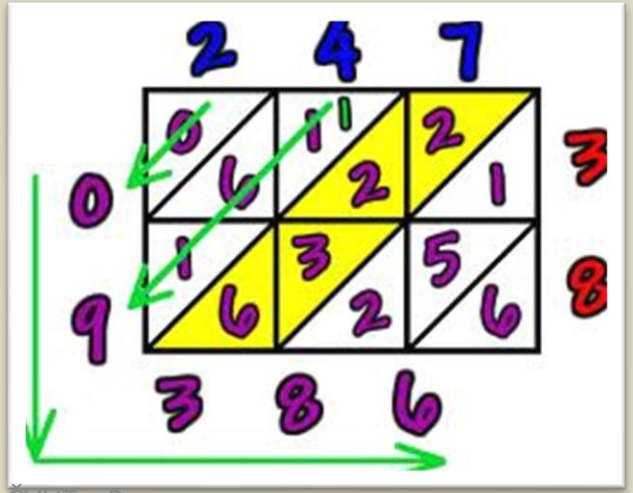
Luca Paccioli – Summa de arithmetica - 1494

Algoritmy pro násobení

- Metoda gelosia – jalousia







15. století – aplikace metody gelosia

Piero della Francesca:
Trattato d'abaco
- Pojednání o perspektivě

Luca Pacioli:

Summa
de arithmetica,
geometria
proportioni
e proportionalita

1494