

Historie matematiky a informatiky

2020

Doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT v Praze

Pýthagorás ze Samu, 6. stol. př. n. l.

- Mýtická osoba? **Antický Jára Cimrman?**
- Pýthagorovi učitelé - **Thalés** a mladší **Anaximandros**.
- Kolem roku 535 př. n. l. se vydal do Egypta.
- Asi 525 př. n. l. se dostal do vězení, byl poslán do Babylónu.
- Asi 520 návrat na Samos
- Cestoval na Krétu studovat zákony, pak založil „filosofické společenství“.
- Asi 518 odešel do jižní Itálie, do Krotónu, kde se stal představitelem tajné společnosti.
 - **Realita má matematický charakter.**
 - **Členové společnosti jsou loyální a neprozrazují žádná tajemství.**

Co se připisuje Pýthagorovi?

- **Součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým úhlům.**
- Pýthagorejci také znali zobecnění:
Mnohoúhelník s n stranami má součet vnitřních úhlů $2n - 4$ pravých úhlů a součet vnějších úhlů je roven 4 pravým úhlům.
- **Pýthagorova věta** (Kolik je známo důkazů?)
- **Konstrukce útvarů dané plochy a geometrická algebra.**
Např. řešení rovnice $a(a - x) = x^2$ geometrickými prostředky, algebraické identity.

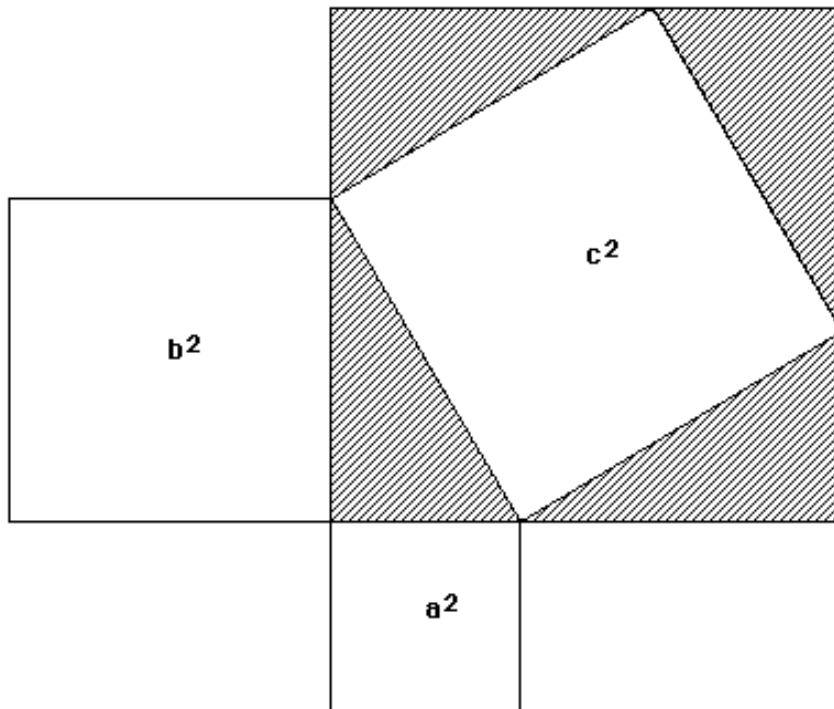
Co se připisuje Pýthagorovi? - 2

- **Objev iracionálních čísel.**
- **5 pravidelných těles,**
pravděpodobně uměl zkonstruovat první 3.
- V astronomii Pythagoras učil,
že **Země je koule ve středu „našeho vesmíru“.**
Také poznal, že
dráha Měsíce je blízká rovníku Země
a že **Venuše v roli Večernice je stejný objekt
jako Jitřenka.**

Pýthagorovci a pýthagorejci

PYTHAGORAS'S THEOREM

In a right angled triangle the area of the square on the hypotenuse is the sum of the areas of the squares on the other two sides.



HERE IS A PROOF:

Fit copies of the triangle around c^2 .

The area of the big square is area $(a+b)^2$

The triangle's area is $ab/2$.

Hence $(a+b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$.

So $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$
and thus $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkazů Pýthagorovy věty je známo více než 300.

Pýthagorejci a prvočísla

- Pýthagorejci zkoumali mystické a numerologické vlastnosti čísel.
- Zavedli pojem **prvočíselnosti** (primality), **dokonalého** (perfect) čísla a **spřátelených** (amicable) čísel.

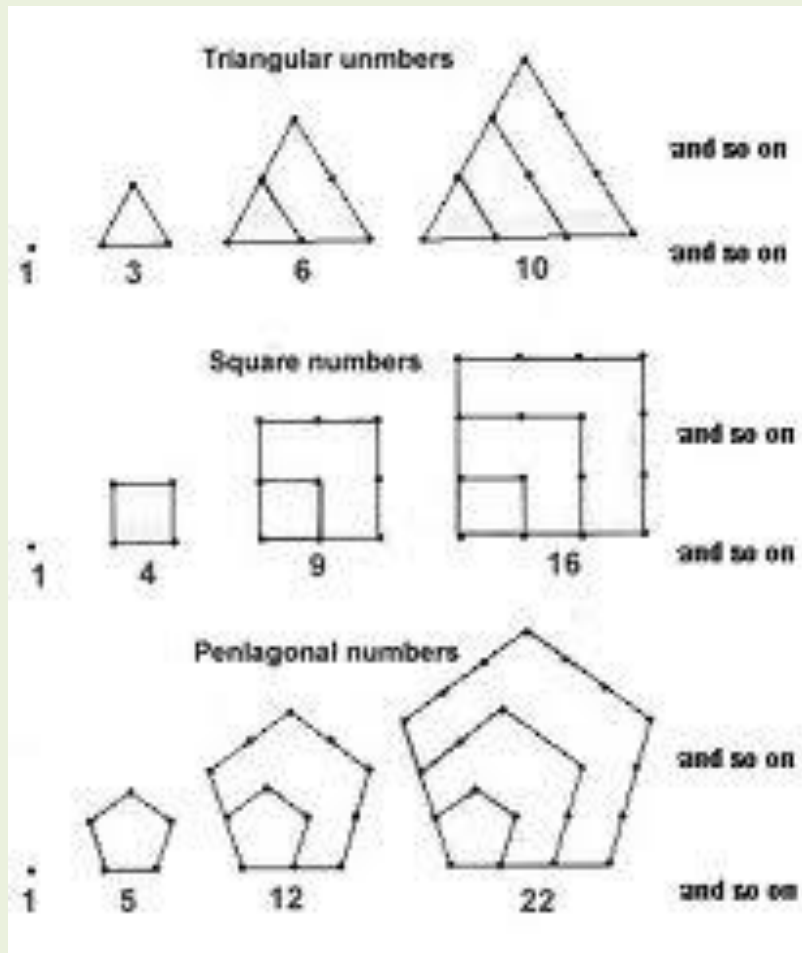
Dokonalé číslo – součet vlastní dělitelů je číslo samo, např. 6 má vlastní dělitele 1, 2 a 3 a $1 + 2 + 3 = 6$, 28 má dělitele 1, 2, 4, 7, 14 a $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Dvojice spřátelených čísel např. 220 a 284 (součet vlastních dělitelů jednoho čísla je roven druhému a naopak).

3 poznámky o prvočíslech

- V **Eukleidových Základech** kolem roku 300 př. n. l., je dokázáno několik výsledků o prvočíslech. V 9. knize Eukleidés dokazuje, že je **nekonečně mnoho prvočísel** – nepřímý důkaz - sporem. Eukleidés také dokazuje tzv. **Základní větu aritmetiky**: *Každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součin prvočísel jediným způsobem.*
- Eukleidés také ukazuje, že je-li číslo tvaru $2^n - 1$ prvočíslo, pak číslo $2^{n-1}(2^n - 1)$ je dokonalé. Matematik **Euler** (v roce 1747) *dokázal, že všechna sudá dokonalá čísla mají tento tvar.*
- **Dodnes nevíme, zdali existují nějaká lichá dokonalá čísla.**
- Kolem roku 200 př. n. l. Řek Eratosthenes z Alexandrie zavedl **algoritmus** pro výpočet prvočísel - **Eratosthenovo síto.**

Figurální čísla



- Trojúhelníková čísla (aplikace ve pražském orloji)
- Čtvercová čísla
- Pětiúhelníková čísla (pentagonální)

2000 let staré problémy

Ukázka toho, čím se matematici zabývali:

- **Racionální číslo může být vyjádřeno ve tvaru zlomku 2 přirozených čísel. Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.** Poznámka: Potřeba zabývat se $\sqrt{2}$ vznikla přirozeným způsobem v zeměměřictví a tesařských technikách.
- **Prvočíslo je kladné celé číslo větší než 1, které má pouze dva dělitele: sebe sama a číslo 1.**
Dokažte, že existuje nekonečný počet prvočísel.
- **Poznámka:** V současnosti se velká prvočísla ukazují jako velmi užitečná v informatice.

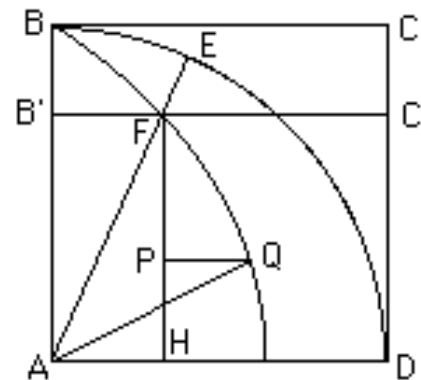
Klasické antické problémy

- **Kvadratura kruhu**
(Squaring the Circle, Quadrature of the circle)
- **Trisekce úhlu**
(Trisecting an Angle)
- **Zdvojení krychle**
(Doubling the Cube, Duplicating the Cube)

Kvadratura kruhu – 5. stol. př. n. l.

Úloha: Najděte pomocí kružítka a pravítka čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh.

- Anaxagoras (499 – 428) - úlohu řešil ve vězení „*Slunce není božské a Měsíc odráží sluneční světlo.*“
- Hippokratés z Chiu (470 – 410) - první rovinná konstrukce
- Antifón (480 – 411) a Bryson (2. pol. 5. st.) vepisovali a opisovali mnohoúhelníky
- Hippiás z Élidy, (cca 460 – cca 400) a
- Deinostratés (390 – 320) – použili křivku kvadratrix



Kvadratura kruhu - 2

- Pappos z Alexandrie (cca 290 - cca 350)
 - Jan Marek Marci z Kronlandu (1595 – 1667)
pojednání Labyrint – 20 různých metod
-

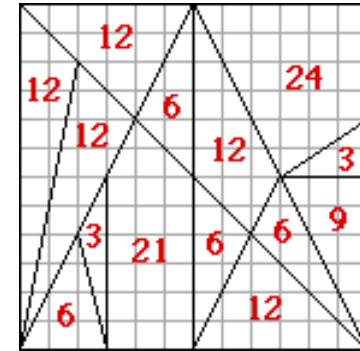
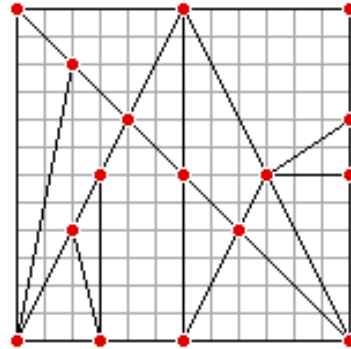
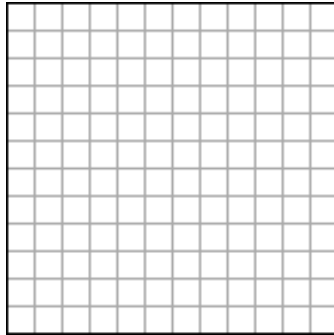
2. pol. 19. stol.

$$a^2 = \pi r^2$$

- Carl F. von Lindemann, 1882:
 π je transcendentní číslo.

Konstrukce čtverce o stejném obsahu jako je daný kruh **je nemožná!** Pouze aproximace.

Stomachion



Dva fragmenty popisu hry – řecký a arabský jsou připisovány Archimédovi. Řecký fragment je z 10. století a byl nalezen v Konstantinopoli v roce 1899.



Hra se skládá ze 14 dílů a cílem je vytvořit z dílů různé tvary, např. slona. V arabském rukopisu je popsána konstrukce a výpočty obsahu jednotlivých dílů. Dnes se k tomuto výpočtu užívá Pickovy věty.

Stomachion a Pickova věta

Arabský rukopis také obsahuje výpočty obsahů jednotlivých částí stomachionu. Jsou v poměru obsahu celého čtverce $12 \times 12 = 144 j^2$

1 : 48 (2 části o velikosti $3 j^2$)

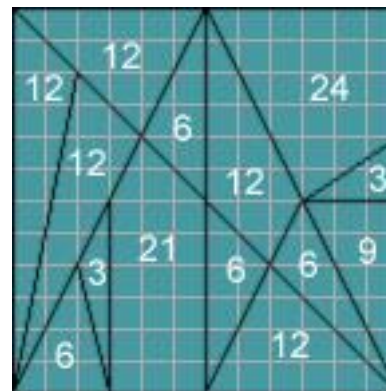
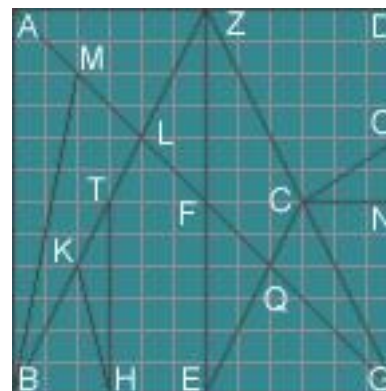
1 : 24 (4 části o velikosti $6 j^2$)

1 : 16 (1 část o velikosti $9 j^2$)

1 : 12 (5 části o velikosti $12 j^2$)

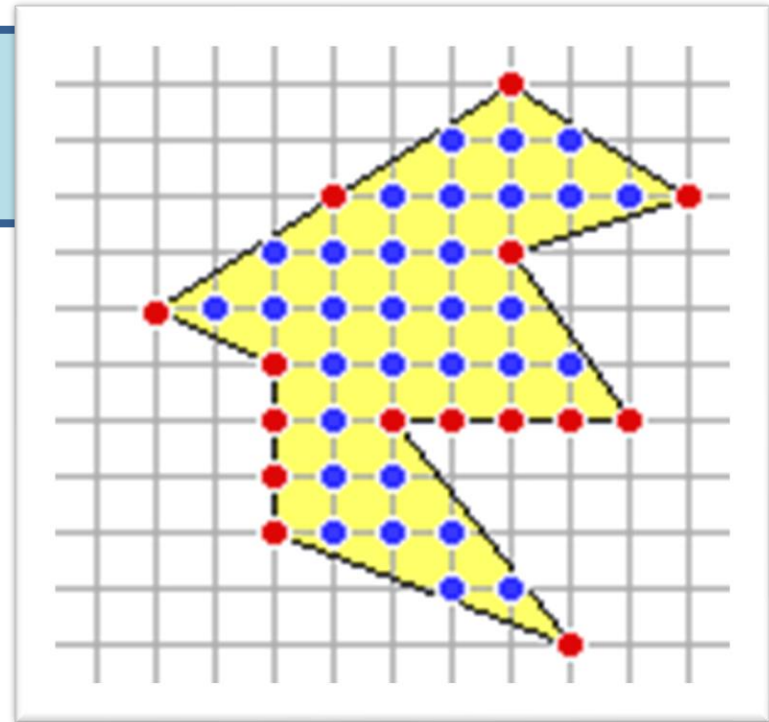
7 : 48 (1 část o velikosti $21 j^2$)

1 : 6 (1 část o velikosti $24 j^2$).



Pickova věta

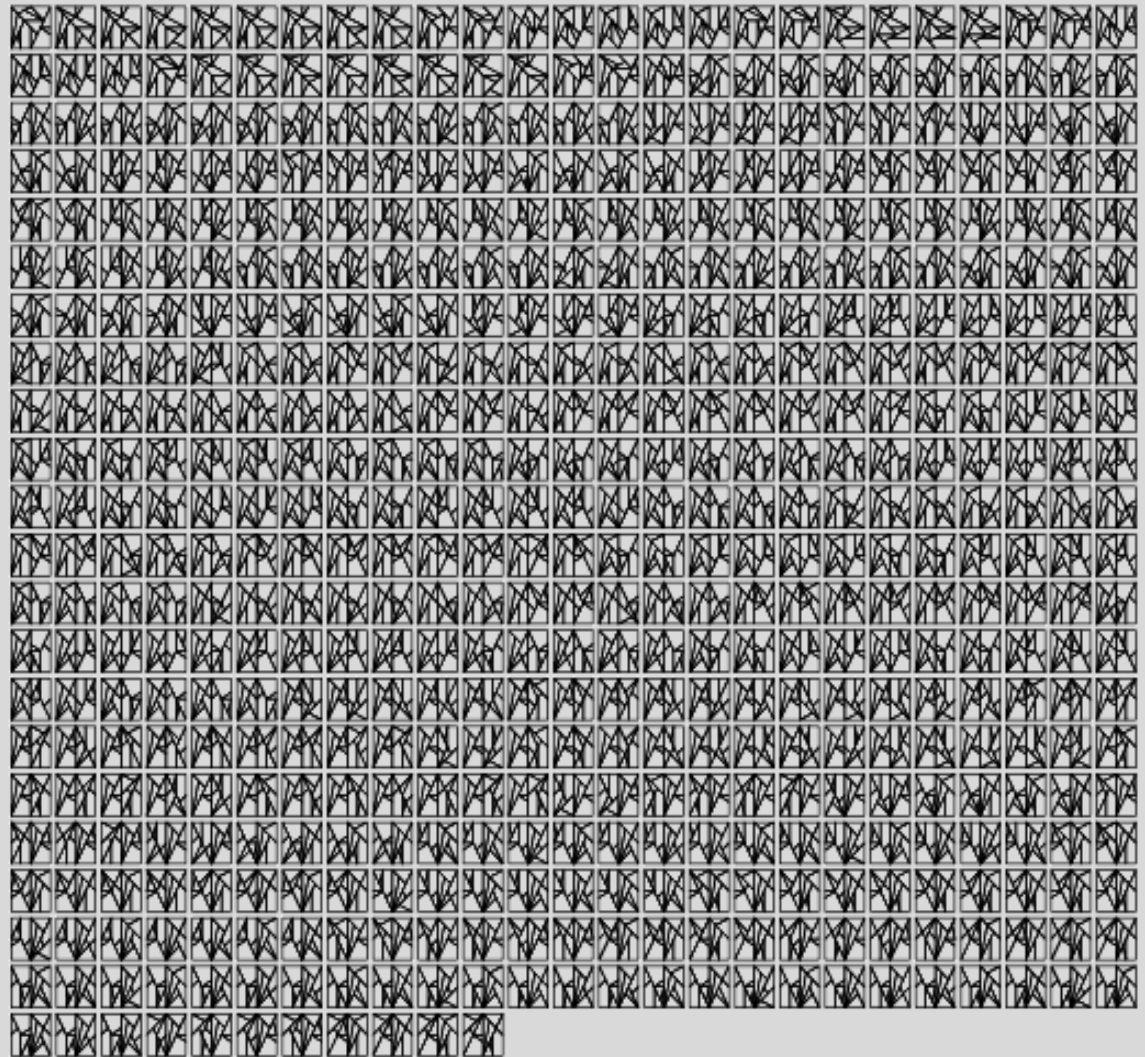
- $P(x) = I + B/2 - 1$, kde
 I je počet vnitřních síťových bodů (x)
 B je bodů na obvodu obrazce (x)



- Pickova věta je pojmenována po svém objeviteli.
 rakouský matematik, **profesor pražské univerzity**
 Georg Alexander Pick (1859-1942).
- Georg Pick
 „Geometrisches zur Zahlenlehre“
 Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift
 Prague, **19** (1899), 311-319.

Stomachion v 21. století

- V listopadu 2003 –
- **Bill Cutler** ukázal, že je **536** možností uspořádání dílů do čtverce, etc.
- Studium dalších vlastností hry pokračuje.



Důkazy a rozšíření Pickovy věty

W. W. Funkenbusch

“From Euler’s Formula to Pick’s Formula using an Edge Theorem”

[*The American Mathematical Monthly*](#)

Volume 81 (1974) pages 647-648

Dale E. Varberg

“Pick’s Theorem Revisited”

[*The American Mathematical Monthly*](#)

Volume 92 (1985) pages 584-587

Branko Grünbaum and G. C. Shephard

“Pick’s Theorem”

[*The American Mathematical Monthly*](#)

Volume 100 (1993) pages 150-161

Alexander Bogomolny

“Cut-the-Knot” web site

A Proof of Pick’s Theorem

http://www.cut-the-knot-org.ctk/Pick_proof.shtml