

Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Historie matematiky

Magické čtverce

Bc. Kabelková Lucie

Olomouc 2023

Úvod

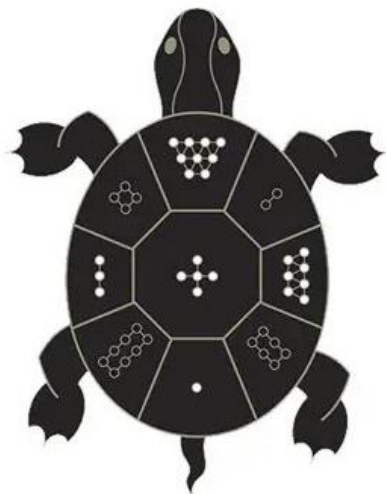
Mezi matematické jevy patří magické čtverce, které můžeme zařadit k matematickým hrátkám. Magické čtverce jsou na světě několik tisíc let, ale dodnes nejsou zcela prozkoumány. V této práci se budeme věnovat historii magických čtverců a jejich počátkům, propojení s uměním a konstrukčním metodám.

Magický čtverec je čtvercová tabulka s čísly a součet čísel v každém řádku, sloupci a v každé úhlopříčce je stejný. Tomuto součtu říkáme magická konstanta. Z pravidla se každé číslo vyskytuje ve čtverci jen jednou. Máme-li čtverec o straně n , poté jsou ve čtverci čísla od 1 do n^2 .

Počátky magických čtverců

Původ magických čtverců není zcela známý, ale první písemné zmínky pochází ze starověké Číny. V nejstarší dochované knize *I-t'ing*, překládaná jako *Knih proměn*, můžeme najít dvě legendy o magickém čtverci. Kniha nejspíš pochází z let 2200 př. n. l., avšak legendy „*Velký plán*“ a „*Říční mapa*“ byly zapsány přibližně roku 650 př. n. l.

Čínská legenda „*Velký plán*“ známá jako *Lo Shu* vypráví příběh o želvě, které žila v Číně v řece Lo (žlutá řeka) a byla služebníkem říčního boha. Ten byl rozhněvaný a zaplavil řeku Lo. Během obrovské potopy císař Yu našel želvu, která měla na zádech vyrytý vzor. Byla to magická želva, protože měla na krunyři magický čtverec o straně 3, čísla byla znázorněna tečky.



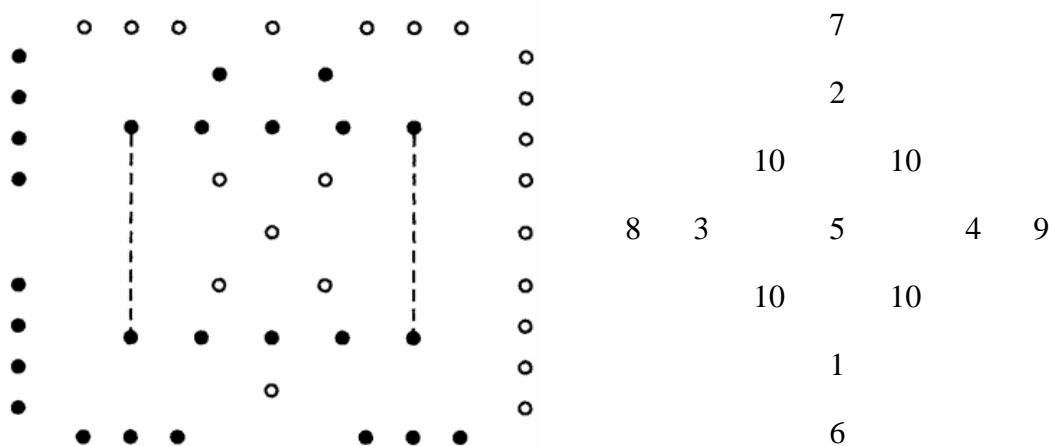
Želva Lo Shu

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Magický čtverec Lo Shu

Magický čtverec nese jméno Lo Shu a je jedinečný, protože další magické čtverce 3x3 lze vytvořit pouze rotací a zrcadlením čtverce Lo Shu. Součet čísel v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je 15, tedy magická konstanta má hodnotu 15. Na okraji čtverce se střídají sudá a lichá čísla, právě lichá čísla jsou vždy v rozích. Ve středu čtverce se nachází číslo 5. Pro Číňany je toto číslo velmi významné, často mají chrámy ve tvaru čtverce a uprostřed je právě číslo 5. Magickým čtvercům byly dlouhá léta přikládány magické vlastnosti a byly považovány za talisman.

Druhá legenda s názvem „Říční mapa“ je opět o posvátné želvě. Ta se vynořila z řeky Ho a měla na zádech magický čtverec, který vypadal jako mapa. Můžeme vidět středovou symetrii součtů protilehlých cifer (např. $5+3=8$, $3+10+2=8+7$).



Říční mapa

Číselný přepis Říční mapy

Magické čtverce byly znázorňovány na různých předmětech například na přívěscích, amuletech, vyrobených z kovu či kamene. Pro obyvatele Číny, Indie, starého Egypta měly určitý význam, uvádí se numerologický, astronomický a magický. Na území Orientu jsou ještě v dnešní době používány k magickým a kouzelnickým účelům.

Z druhé poloviny 10. století se dochoval arabský spis *Rasá'il Ichwán as-Safá wachillán al-wafá'*, v překladu *Traktáty Bratří Čistoty*, kde jsou zmiňovány magické čtverce ve spojitosti s amulety a talismany.

V Indii byl v první polovině 11. století vytvořen nejstarší indický magický čtverec 4. řádu, který najdeme na dveřích do svatyně Chotá Surang. Čtverec je panmagický a jeho konstantu 34 může vypočítat jako součet čísel v libovolném čtverci 2x2, u dvou protilehlých dvojic, v rozích

čtverce 3x3 nebo v rozích původního čtverce. Konstrukci popsal Narayana v díle *Ganita Kaumudi* a nejspíš z ní později vycházel Al-Buni (+1225). Indická metoda konstrukce se přisuzuje jiným, protože matematici v Indii se magickými čtverci příliš nezaobírali.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Nejstarší indický magický čtverec

Kolem 11. – 12. století se začaly objevovat magické čtverce v Evropě, pravděpodobně vycházely z arabských poznatků. Alespoň tak tomu bylo u byzantského (řeckého) učenice Manuela Maschopula, který v dopisech příteli popsal matematickou stránku magických čtverců lichých a dvojnásobně sudých řádů. Toto je považováno za první písemný záznam o magických čtvercích v Evropě přibližně z roku 1315.

Italský mnich a matematik Luca Pacioli (1445 – 1514) kolem roku 1500 shromažďoval mimo jiné příklady o magických čtvercích, ve své práci je nakonec nezveřejnil, pouze popsal magické čtverce 3. až 9. řádu a systém I.

Dále se magickými čtverci zabývali němečtí matematici Adam Riese (1492 – 1559) a Michael Stifela (1487 – 1567), v první polovině 16. století popsalí originální konstrukce magických čtverců. Michael Stifela vysvětlil konstrukci koncentrických magických čtverců, které byly nalezeny už v Číně, ale jsou často přisuzovány jemu. Sestavil postup, pomocí něhož lze vytvořit magický čtverec lichého řádu a vymyslel postup i pro magický čtverec sudého řádu.

Během renesance se rozvíjely vědecké poznatky, například astronomie. Věda byla často spojována s mystikou a magií, toho využili někteří vědci jako Tycho de Brahe (1546 – 1601), Johannes Kepler (1571 – 1630), Issac Newton (1643 – 1727) a další alchymisté, aby si přivydělali. Vytvářeli různé magickými výklady a horoskopy za pomoci hotových magických čtverců.

Magické pojetí magických čtverců rozšířil po Evropě německý humanitní učenec Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim (1486 – 1535). Ve své knize *De occulta*

philosophia libri tres, v překladu *Okultní filozofie* z roku 1531 popsal moudrosti, které lze použít k ovládnutí lidí a přírody. Dále v díle přiřadil magické čtverce k planetám, vznikl systém II, zapsal čtverce ve dvou verzích, arabskými čísly a hebrejskými písmeny a detailně vysvětlil použití čtverců. Pro zajímavost magický čtverec Lo Shu přiřadil k Saturnu, od té doby je někdy magický čtverec 3x3 nazýván Saturn a magické čtverce jako Agrippovy čtverce.

						11	24	7	20	3	
			4	14	15	1	4	12	25	8	16
4	9	2	9	7	6	12	17	5	13	21	9
3	5	7	5	11	10	8	10	18	1	14	22
8	1	6	16	2	3	13	23	6	19	2	15
Saturn			Jupiter						Mars		

Lékař Paracelsus celým jménem Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493 – 1541) vytvořil dílo *Archidoxa magica*, kde ukazuje léčebné užití magických čtverců. Popisuje léčbu silou pečetě, které je vyrobena z daného kovu, a na ní je z jedné strany magický čtverec a z druhé obraz planety. Když srovnáme magické čtverce přiřazené k planetám podle Paracelsusa, liší se pouze magický čtverec 5. řádu od čtverce téhož řádu dle Agrippa.

Magické čtverce a umění

Časem byly magické čtverce považovány za hříčky s čísly, začali je používat umělci, protože byly estetické a nesly nějakou symboliku. Nejznámější dílo s magickým čtvercem vytvořil německý malíř Albrecht Dürer (1471 – 1528), rytinu *Melencolia I*. Dílo obsahuje spoustu matematických prvků a jedním z nich je právě magický čtverec 4x4. Dürer často cestoval a zajímal se o matematiku, pravděpodobně v Itálii se setkal s prací Pacioliho, kde je uveden použitý čtverec. Nejspíš si ho vybral, protože v posledním řádku uprostřed jsou čísla 15 a 14, což je rok úmrtí jeho matky Barbary a nejspíš i rok vzniku obrazu. Součet čtverce nejen v každém řádku, sloupci, úhlopříčkách, ale také v prostředním čtverci 2x2 a v rozích samotného čtverce je 34.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Albrecht Dürer, Melencolia I a jeho magický čtverec

Ve spojení s architekturou je magický čtverec na stěně Gaudího katedrály Sagrada Família v Barceloně. Josep María Subirachs (1927 – 2014) ztvárnil sochy a čtverec, který vychází z Dürerova magického čtverce, ale pozměnil ho tak, aby součet vycházel 33, Kristova léta. Ve čtverci se některá čísla opakují, a tak čtverec neodpovídá pravidlům magických čtverců. V roce 2001 Lee Sallows (*1944) vytvořil několik magických čtverců se součtem 33, kde se již čísla neopakují.



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Josep María Subirachs, sochy a magický čtverec u katedrály Sagrada Família

Magických čtverců je několik druhů, ale obecně můžeme říci, že se jedná o schéma ve tvaru čtverce, v němž jsou uspořádány symboly podle pravidel. Symboly nemusí být pouze čísla ale třeba písmena. Jedním z nejznámějších čtverců, který obsahuje písmena, je čtverec Sator. Ze středověku o něm víme, že býval vyryt do amuletů, aby chránil před démony, neštěstím, nemocí, nebo do trámů, aby chránil budovu před požárem. Čtverec obsahuje pět slov, která mají tvořit zaklínadlo

S A T O R
A R E P O
T E N E T
O P E R A
R O T A S

Čtverec Sator

Existuje magický čtverec Rvach, který měl za úkol chránit proti zlodějům. Slovo rvach v hebrejštině znamená duch.

Konstrukční metody a zajímavé magické čtverce

Magický čtverec lze sestavit několika způsoby. Mezi nejvýznamnější metody patří siamská, kterou vymyslel Simon de la Loudère (1642 – 1729), francouzský diplomat a matematik, který byl zrovna v Siamu jako velvyslanec. Číslo 1 umístíme doprostřed horní řady, další čísla (2 až n) umístíme po diagonále směrem nahoru a doprava. Číslo $n+1$ umístíme pod číslo n a postup opakujeme, dokud nezaplníme čtverec. Tato metoda platí pro všechny liché čtverce od 3×3 do nekonečna, vytváří symetrické magické čtverce.

Metoda odpovídá Al-Buniho metodě čtvercům, která vychází z kombinace dvou ortogonálních latinských čtverců. Arabské metody Al-Buniho pochází z počátků 13. století, později se ukázalo, že matematikové 18. století je převzali například Leonhardo Euler (1707 – 1783), který je pak neprávem nazýván objevitelem metody. Ale ani Al-Buni není objevitelem, protože již Indové ještě před Eulerem vymysleli, jak pomocí latinského čtverce lichého řádu vytvořit čtverec magický.

Euler se zabýval magickými čtverci už v roce 1726, přes ně se nejspíše dostal k latinským čtvercům, což jsou čtvercové matice, kde v každém řádku a sloupci je permutace dané konečné

množiny. Později se vrátil k magickým čtvercům v díle *Recherches sur une nouvelle espèce de carres magiques*, v překladu *Zkoumání nového typu magického čtverce* z roku 1782. První postup demonstroval na magickém čtverci 3x3 a místo čísel použil latinská a řecké písmena. Stejný postup ověřil i u čtverce 4. řádu, vyšlo mu 567 různých čtverců, a pro čtverce 5. řádu 14 400 různých čtverců. Pro čtverce 6. řádu musel použít jiné pomocné čtverce.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & b & c & \gamma & \beta & \alpha & a + \gamma & b + \beta & c + \alpha \\
 b & c & a & \alpha & \gamma & \beta & b + \alpha & c + \gamma & a + \beta \\
 c & a & b & \beta & \alpha & \gamma & c + \beta & a + \alpha & b + \gamma
 \end{array}$$

Eulerova myšlenka (z dvou latinských čtverců vznikne čtverec magický)

V roce 1770 Euler poslal dopis Josephu Lagrangeovi, kde byl příklad magického čtverce 4x4, který byl tvořen druhými mocninami. Christian Boyer (*1958) přišel na čtverec 4x4, 5x5 a 7x7, v kterém jsou mocniny čísel 0 – 48. Dodnes nebyl vytvořen čtverec s druhými mocninami o velikosti 3x3.

V pozdějším věku, když byl Euler slepý, zabýval se úlohou, kdy má šachový kůň projít celou šachovnicí, aby navštívil každé pole právě jednou. Řešení vymyslel dokonce, když na některé pole s koněm vstoupil, popsal ho pořadovým číslem a na závěr vznikl polomagický / semimagický čtverec (součty v řádkách, sloupcích jsou 260, to neplatí pro úhlopříčky). Ruský šachista Carl Jaenisch (1813 – 1872) sestrojil semimagicý čtverec, kdy se kůň může z posledního pole (čísla 64) vrátit na první pole (čísla 1).

Americký vědec a politik Benjamin Franklin (1706 – 1790) v mládí sestavoval magické čtverce, prý do nich doplňoval čísla stejně rychle jako by psal. Vymyslel zajímavý čtverec 8x8, kterému se říká supermagický, má několik vlastností, o nichž možná nevěděl ani on sám. Například součet řádků, sloupců, úhlopříček a lomených řádků je 260. Polovina řádku, sloupce je polovina magické konstanty, 130. Ve středním čtverci 2x2 je součet 130. Při rozdělení na 4 stejné čtverce 4x4 je každý z nově vzniklých čtverců pseudomagický, ale neskládají se z čísel 1 – 16 a součet řádků, sloupců je shodný, 130.

Bachet de Méziriac (1581 – 1638) v roce 1624 vymyslel konstrukci magického čtverce pro liché řády. K původnímu čtverci přičtve další pole tak, aby vznikl kosočtverec. V dalším kroku vpisujeme čísla podél stran, pak čísla v rozích kosočtverce překlopíme do volných polí.

		3		
2	6		5	
4	8		7	

		3		
2	7	6		
9	5	1		
4	3	8		

Magický čtverec podle Bachet de Méziriac

Pro konstrukci magických čtverců sudého řádu $n=2(2k+1)$ zformuloval John H. Conway roku 1937 metodu LUX nazvanou podle směrů zapisování čísel. Nejprve síť rozdělíme na čtverce 2x2. Poté pomocné čtverce v prvních $k+1$ řádcích označíme L, dalším řádku označíme U a posledních $k-1$ řádcích označíme X. Vprostřed tabulky prohodíme označení prostředního čtverce U s L, které je nad ním. Než budeme vpisovat samotná čísla, označíme si pořadí pomocných čtverců jako bychom konstruovali magický čtverec podle Loubéra.

	4								
	2								
	1								
	2								
	1								
	3								
	1								
	3								

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
L		L		L		L		L	
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
L		L		L		L		L	
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
L		L		L		L		L	
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
L		L		U		L		L	
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
L		L		U		L		L	
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
U		U		L		U		U	
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
U		U		L		U		U	
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
X		X		X		X		X	
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
X		X		X		X		X	
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

Metoda LUX pro čtverec 10. řádu

Allan Johnson sestrojil magický čtverec 7x7 obsahující samé prvočísla, dokonce prostřední čtverec 3x3 a 5x5 jsou také magické. Herry Nelson roku 1988 vytvořil nejmenší magický čtverec 3x3 z po sobě jdoucích prvočísel. J. N. Muncey objevil čtverec pro prvních n prvočísel (včetně 1) v roce 1913.

Závěr

Zjistili jsme, že magické čtverce mají velmi bohatou historii, prošli jsme od Číny, přes arabské země, Indii do Evropy. V práci byly zmíněny nejdůležitější poznatky od počátku do současnosti, přestože se přesně neví, kdy první magický čtverec vzniknul.

Magických čtverců je nespočet. Nejmenší magický čtverec je čtverec řádu 3 a nazývá se Lo Shu nebo Saturn, i když má více názvů je jen jeden, byť může mít až 8 podob. Magických čtverců řádu 4 je celkem 880, vytvořil je Bernard Frénicle de Bessy v roce 1693 a analyticky to ověřili v roce 1982. Magických čtverců řádu 5 je 275 305 224 (v roce 1974). A počet magických čtverců řádu 6 dosud nikdo nevypočítal. Oblast magických čtverců stále není dostatečně probádána a stále je co ověřovat a vymýšlet.

Použitá literatura a obrázky

POLÁŠEK, Martin. Latinské a magické čtverce. [online]. Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta MU, Brno 2011. Dostupné z www: https://is.muni.cz/th/rkmae/diplomova_prace.pdf

ROSKOVEC, Tomáš. Magické čtverce. [online], Matematický korespondenční seminář. Dostupné z www: [MagickeCtverceTR.pdf \(prase.cz\)](https://prase.cz/MagickeCtverceTR.pdf)

FUCHS, Eduard. MAGICKÉ ČTVERCE aneb Od knihy I-ťing k internetové současnosti. [online]. Dostupné z www: http://web.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf

SUCHÁ, Lucie. Magické čtverce. [online]. Diplomová práce, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice 2017. Dostupné z www: <https://theses.cz/id/z44f4u/21096151>

Magisch 3x3 vierkant. Magisch vierkant. [online]. [cit. 2023-01-01]. Dostupné z www: <https://www.magischvierkant.com/twee-dimensionaal-nl/3x3/>

MAGICKÉ ČTVERCE. Techmania science center. [online]. [cit. 2023-01-03]. Dostupné z www: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/aritmetika/magicke-ctverce>

Magický čtverec – mystický rébus s tisíciletou historií. Mozkolam.cz. [online]. [cit. 2023-01-02]. Dostupné z www: <https://mozkolam.cz/historie-hlavalamu/magicky-ctverec/>

KOCIÁNOVÁ, Bára. Magické čtverce. [online]. Dostupné z www: <https://prase.cz/library/MagickectverceBK/MagickectverceBK.pdf>

Melancholie I. Wikipedie. [online]. [cit. 2023-01-04]. Dostupné z www: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/18/D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg/383px-D%C3%BCrer_Melancholia_I.jpg

Sagrada família. A City A Month. [online]. [cit. 2023-01-03]. Dostupné z www: https://acityamonth.com/wp-content/uploads/2017/10/IMG_4382-1.jpg