Stručná historie lineární algebry

ALENA ŠOLCOVÁ

FIT CVUT V PRAZE, 2020

Co rozumíme lineární algebrou?

Především,
je **lineární algebra studium určitých algebraických struktur, které nazýváme vektorovým prostorem.**

Dále je
lineární algebra studium soustav lineárních rovnic a jejich transformací a jejich vlastností.

Konečně,
je to oblast matematiky, která se věnuje zkoumání vlastností lineárních zobrazení.

Budeme se tedy zabývat historií lineární algebry, která se vztahuje k lineárním soustavám rovnic, jejich transformacím a vektorovým prostorům.

Před 4000 lety …
Od Babylonu do druhé poloviny 17. století

Před 4000 lety, **obyvatelé Babylonu věděli jak řešit jednoduchou soustavu 2 x 2 lineárních rovnic se 2 neznámými.**

Kolem 200 BC, **Číňané uměli podle díla**

„Matematické umění v devíti knihách"

***řešit soustavu 3 rovnic* o třech neznámých - 3 x 3.**

Jednoduchá lineární rovnice $ax+b = 0$ je starověká otázka, s níž se setkávaly nejstarší civilizace na každém kroku.

Do druhé poloviny 17. století nemáme zachyceny žádné další zprávy v pramenech o významu a pokroku v oblasti lineární algebry.

Vznik lineární algebry

- **Podněty ke vzniku tohoto oboru** jsou spojeny se **zkoumáním determinantů**, hodnot spojených se čtvercovou maticí.

Studoval je jeden ze zakladatelů infinitezimálního počtu -
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) - ve druhé polovině 17.století.

Více než o 50 let později zveřejnil **Gabriel Cramer (1704 – 1752)**
své úvahy o řešení soustavy lineárních rovnic založené na determinantech opět asi o 50 let po Leibnizovi.
Cramer své pravidlo nedokázal pro soustavu n x n.
Lineární algebra se stala významnou až po vzniku infinitezimálního počtu,

i když základní tvar lineární rovnice **$ax + b = 0$ je známý po staletí.**

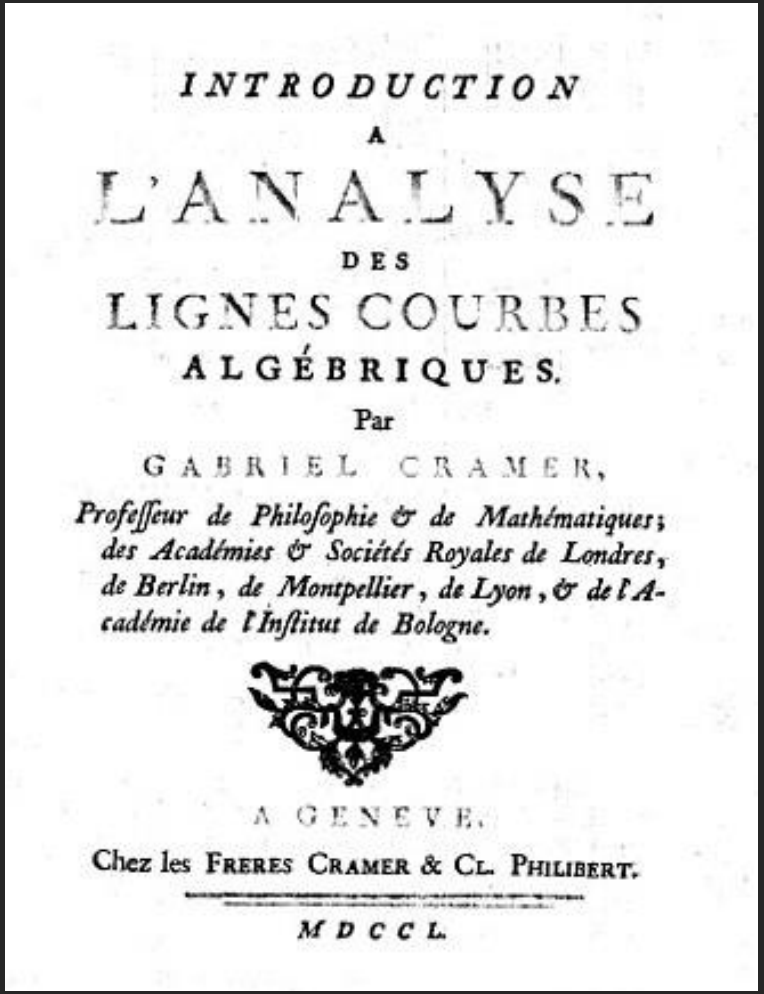
Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) zahájil první kroky v lineární algebře
svou prací, která se týkala tzv. **Lagrangeových multiplikátorů,**
na cestě k hledání extrémů –
"k charakterizovánínímaxim and minim funkcí s více proměnnými.

Gabriel Cramer

1704 - 1752

Cramerovo pravidlo, 1750

Pravidlo již dříve popsal **Colin Maclaurin** v roce 1748 a ještě dříve použil **Gottfried W. Leibniz**.



INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A GENEVE,
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.
M D C C L.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Najděte kořeny soustavy pomocí Cramerova pravidla!

Existence řešení soustavy

Leonhard Euler (1707 - 1783) přispěl úvahou, že soustava rovnic nemusí mít vždy řešení.
Uvědomil si, že je třeba stanovit podmínky, pro něž soustava může mít řešení.

První práce v této době se však týkaly
představy jediného řešení a čtvercových „matic“,
v nichž počet rovnic odpovídá počtu neznámých.

Determinant matice soustavy - det (A) $\neq$ 0, pak má soustava jediné řešení.

Carl Friedrich Gauss a eliminace

Přesuňme se do 19. století: **Gauss zavedl postup, který je dodnes užíván k řešení soustavy lineárních rovnic. Jeho práce (hledání dráhy planetek Ceres a Pallas) souvisela především s řešením soustav lineárních rovnic a přinesla tak myšlenku matice a jejího symbolického označení.**
Jeho námaha s řešením soustav rovnic s velkým počtem neznámých inspirovala další vývoj také tak, jako předcházející tradice spojená s pracemi **Leonharda Eulera, Gottfrieda Wilhelma Leibnize a Gabriela Cramera.**

Gaussova práce je dnes shrnuta v metodě Gaussovy eliminace.
Gauss ve svém postupu užívá kombinaci, výměnu nebo násobení řádek (nebo sloupců) každého s každým, s cílem vyloučit určité proměnné z jisté rovnice (řádku).

Slovo „matice“

Již jsme se zmínili, že **Gaussova práce spojená s řešením lineárních rovnic je sice počátek, ale nezabývá se příliš maticemi.**
K vývoji maticové algebry,
byla potřebná symbolika a označení
a metoda popisu postupu úprav matic a operací s maticemi
Důležitá v tomto vývoji byla definice násobení matic a související otázky.
Počátek **označení pojmu matice** a nový název pro ni byl motivován pokusy zlepšit jazyk algebry pro studium determinantů.

V roce 1848, James J. Sylvester zavedl termín “matrix,” (matice)
Matrix je latinské slovo pro lůno, jako prostor, kde se rodí čísla.
Použil to slovo, protože **považoval matici za generátor determinantů.**

James Joseph Sylvester

Sylvestrovo kritérium

Pojednává o kvadratických formách, které jsou zobecněním kvadratických funkcí do více rozměrů. Lze je popsat symetrickou čtvercovou maticí.

Kriterium říká, kdy grafem je „vícerozměrná parabola“ otevřená nahoru a kdy dolů. Ve více rozměrech však je i třetí možnost, kdy graf vypadá jako sedlová plocha, v některých směrech rostoucí, v některých klesající.

Arthur Cayley (1821 – 1895)

Další pohled přišel z jiné strany:

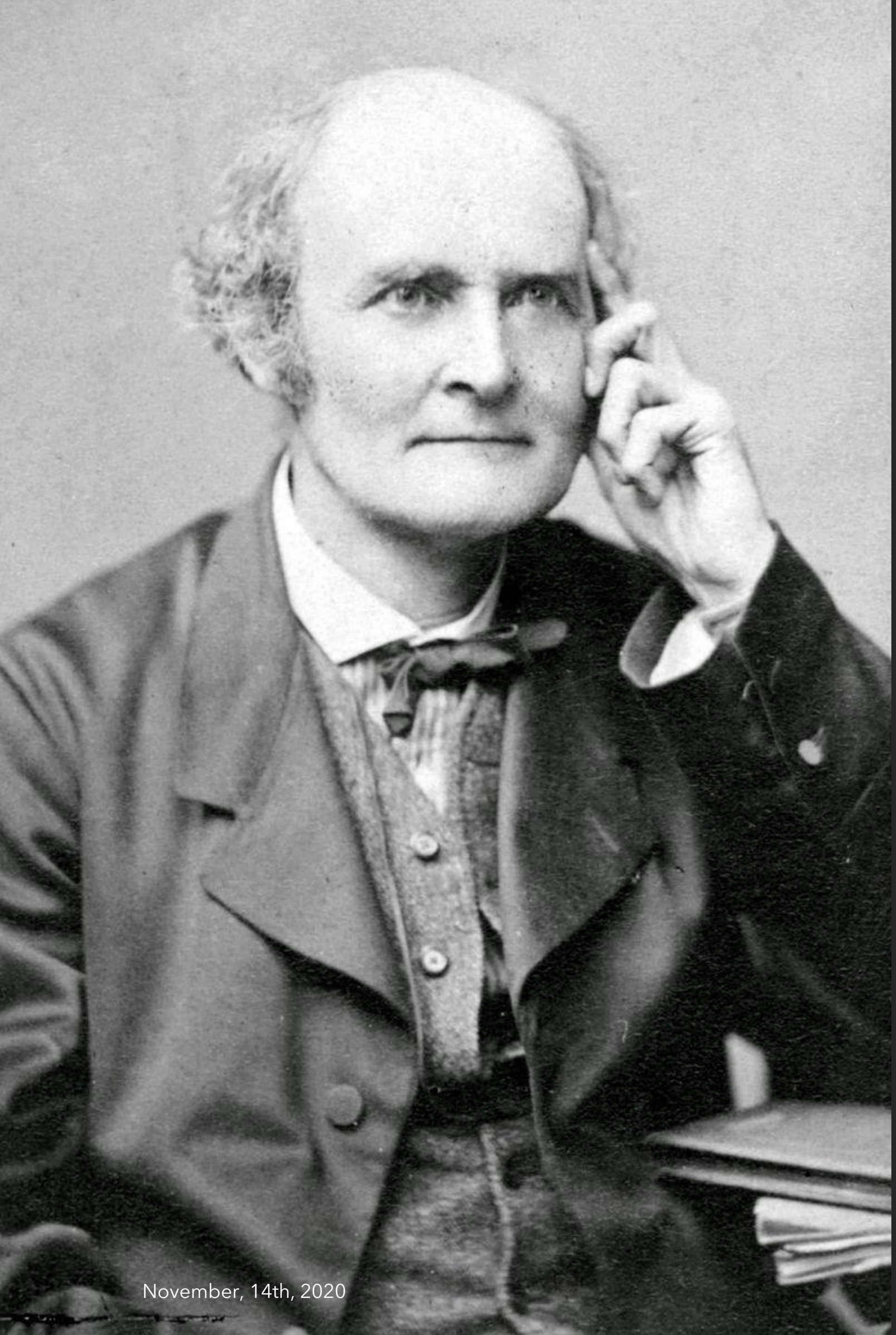
Maticové násobení neboli maticová algebra vychází z díla Arthura Cayleyho in 1855.
Cayleym definované maticové násobení jako**:**
"the matrix of coefficients for the composite transformation $T_2 T_1$ is the product of the matrix for T_2 times the matrix of T_1".

Jeho úvahy v tomto ohledu vyvrcholily ve větě, která se dnes jmenuje

Cayleyho-Hamiltonova věta.
Jednoduše řečeno, **čtvercová matice splňuje svou charakteristickou rovnici.**

Cayleyho výsledky byly publikovány ve dvou pracech, jedna v roce **1850** a druhá v roce **1858.**

V těchto pracech je zavedena **identická matice, inverzní matice ke čtvercové matici.**
Také tyto práce hodně znamenají pro další aplikace matic a vývoj symbolické algebry**.**
Cayley užívá písmeno "A" jako symbol pro matici. Jeho myšlenky se rozšířily až po roce 1880.



Arthur Cayley (1821- 1895)

Cayley-Hamiltonova věta:

. . . determinant, having for its matrix a given matrix less the same matrix considered as a single quantity involving the matrix unity, is equal to zero. (Papers II., str. 482).

$$A = \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix}, \text{ pro } R$$

Formuloval též obecný pojem grupy.

Příklad pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda E - A) = 0$ je charakteristická rovnice matice A.

Jak vypadá matice v determinantu?

$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2, & \lambda - 3 \end{pmatrix},$ **E je jednotková matice**

Pak určíme charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 4 = \boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda - 1}$$

A dosadíme do charakteristického polynomu matici *A* místo λ:

$$\mathbf{P(A) = A^2 - 4A - E = 0}$$

Ukážeme, že matice A je kořenem svého charakteristického polynomu. (Zkuste dokázat!)

Co ukazuje CH věta například?

Cayleyho - Hamiltonova věta ukazuje,
že skládáním obrazení se složitost nezvyšuje nad určitou mez,
neboť nejvyšší mocninu matice lze vyjádřit , např. $A^2 = 4A + \mathrm{E}$.

$$A^8 = A^2 A^2 A^2 A^2 = (4A + E)(4A + E)(4A + E)(4A + E) =$$
$$= (16A^2 + 8A + E)(16A^2 + 8A + E) = (16(4A+E)+8A+E) . (16(4A+E)+8A+E) =$$
$$= (72A + 17E)(72A + 17E) = 72.72(4A + E) + 2.17.72A + 289E = 23184A + 5473E$$

CH věta ukazuje, že umocňováním matice do nekonečna nelze získávat novou kvalitu, dojde k naznačenému zacyklení.
Matici tedy lze popsat pomocí konečně mnoha základních stavebních prvků (vlastní čísla a vlastní směry).

Souvislost lineární algebry s fyzikou

Matice na konci 19. století spojovaly úzce matematiky s fyzikálními problémy a pozornost matematiků upoutaly VEKTORY, které se staly v té době důležitým a zajímavým pojmem matematiky k dalšímu zkoumání jejich vlastností.

Později se na nějaký čas však zájem o lineární algebru zpomalil.

Na konci II. světové války znovu vzrostl v závislosti na vývoji výpočetní techniky.

A dnes …

Nyní místo řešení velkých soustav lineárních, mimořádně velikých *n* x *n* matic, počítače mohou velmi rychle a přesně řešit takové problémy lineární algebry.

Spolu s používáním pokročilých technologií používáme metody Cayleyovy, Gaussovy, Leibnizovy, Eulerovy a dalších.

Determinanty a lineární algebra se posunuly kupředu, úlohy řešíme rychleji a efektivněji.

Bez ohledu na nové technologie
Gaussova eliminační metoda je stále nejlepším způsobem, j
jak řešit soustavu lineárních rovnic.

Vliv lineární algebry je ve světě matematiků velice rozšířen.

Význam lineární algebry v celé matematice

Použití lineární algebry se ve světě matematiků velice rozšířilo, je to důležitý základ pro mnoho principů, zákonů, ale i praktik.
Některé pojmy a metody lineární algebry se užívají k řešení soustav v lineárním formátu, k nalezení řešení dle metody nejmenších čtverců k předvídání budoucích výsledků nebo budoucího směřování a užívají se při používání rozvojů Fourierových řad jako prostředek k řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Používají se také k řešení otázek energie v kvantové mechanice.

Také se užívá k vytvoření rozšířené hry SUDOKU.
Tyto praktické aplikace ukazují na to, jak lineární algebra pozoruhodně rozšířená a pokročilá. **Klíčem k porozumění je poznat, jak nás historie pojmů a metod lineární algebry provází základy těchto aplikací.**

Závěrem

Lineární algebra stala skutečně novou částí matematiky,
když se její používání ve srovnávání s jinými matematickými prostředky velice rozšířilo.
Se snahami o vytvoření dif. a integrálního počtu
Gottfried Wilhelm Leibniz zavedl **používání soustavy lineárních rovnic k řešení nejrůznějších úloh.**

Jeho pokračovatelé **Arthur Cayley, Leonhard Euler, James Joseph Sylvester** a další **změnili soustavu lineárních rovnic k používání matic,**
které je reprezentují, a operací s nimi.

Gauss přispěl svou teorií k řešení soustav rovnic.
Metoda zvaná GEM je užitečný základ pro hledání neznámých v soustavách rovnic.
Technologie nám dovolují více a více a historie lineární algebry pokračuje v objevování důležitých dalších základů v minulosti.
Učebnice LA vycházejí každoročně, ale vždy se v nich setkáme s historickými základy.