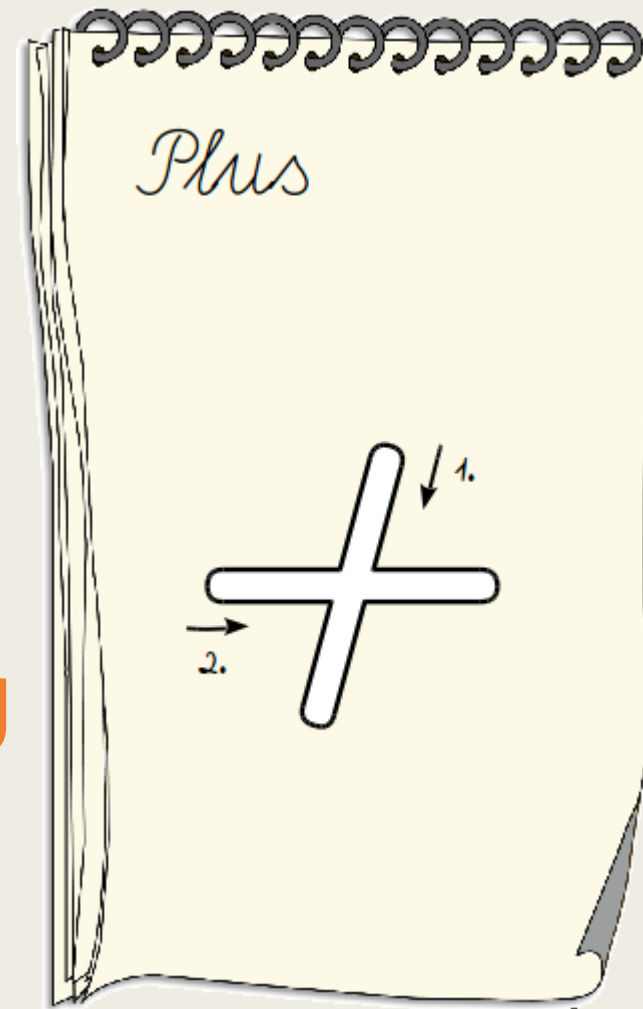


MATEMATIKA VE STŘEDOVĚKU A JOHANNES WIDMANN Z CHEBU

doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.,
Fakulta informačních technologií, ČVUT v Praze



Aritmetika ve středověku

- Kolem konce středověku došlo ve vývoji hornictví a hutnictví ke změnám a úpravám, které měly velký vliv na hospodářský život. To vedlo ke zvýšení peněžního oběhu a ke změnám v metodách praktické aritmetiky.
- Aritmetika se původně rozvíjela v Indii a zemích islámu, odkud nejnovější úspěchy té doby v oblasti matematického myšlení pronikly do Evropy.
- **Hledání vhodných symbolů**
- Potřebná znalost matematické symboliky nebyla ve středověku a v raném novověku dostatečná pro praktické využití.
- Vznikaly různé algoritmy pro výpočty. Toto pojetí se zachovalo až do přelomu středověku a novověku.

Gregorius Reisch
zač. 16. stol.

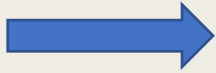
Symbol aritmetiky

Boethius

Pýthagoras



Sedm svobodných umění kvadrivium a trivium

- Ve středověku byla aritmetika podle novoplatoniků zařazena mezi **sedm svobodných umění**.
- Na základě praktického používání aritmetiky, **měly význam přibližné výpočty iracionálních čísel**, které byly nezbytné pro geometrické konstrukce.
- Kvadrivium  **aritmetika, geometrie, astronomie, musica**
- Trivium – logika, dialektika, rétorika

1180, Alsasko

Zahrada rozkoší

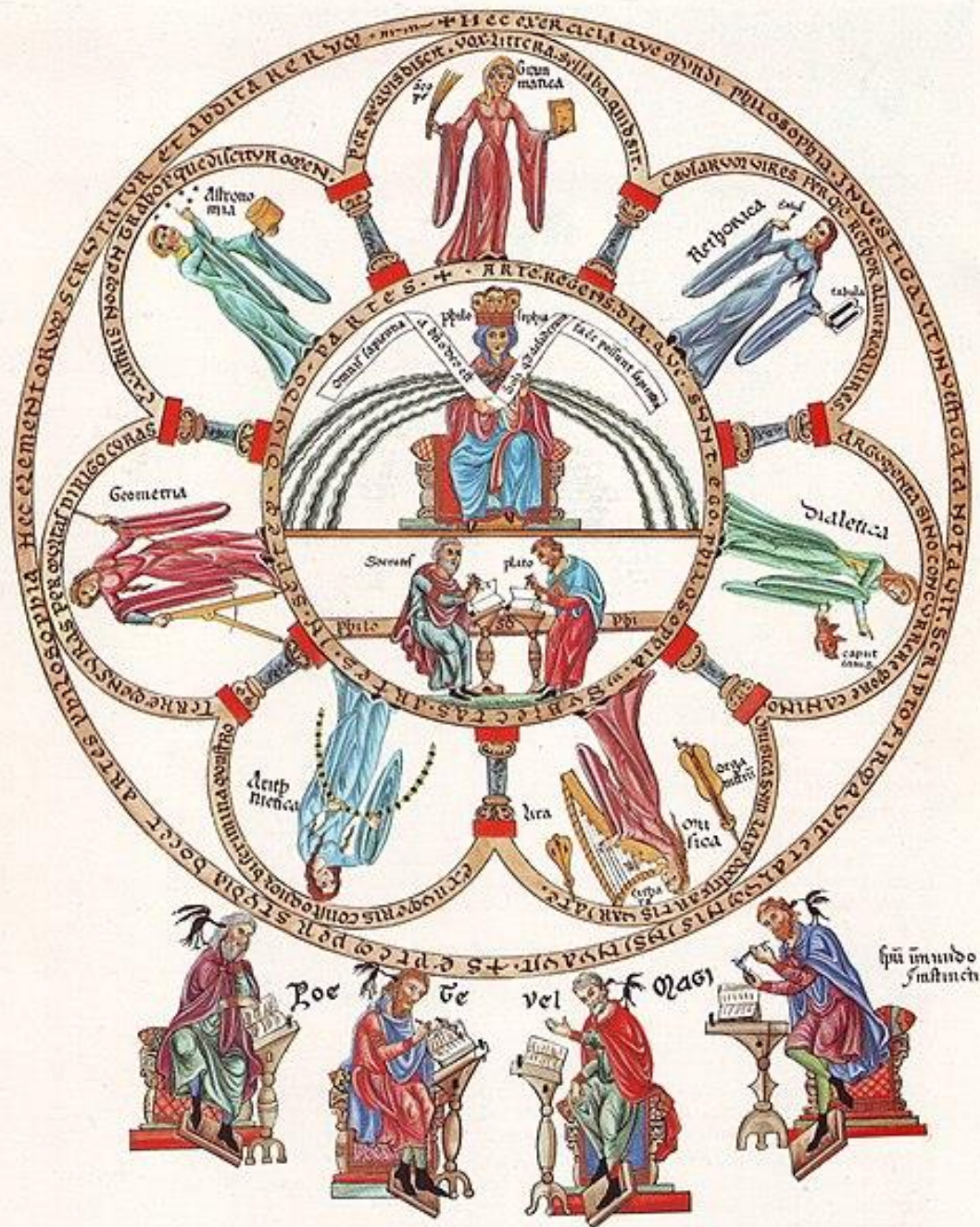
- Vlastní autoportrét
Herrady z Landsbergu,
miniatura (fol. 322–323)

- ***Hortus
deliciarum.***



Herrada z Landsbergu

- Latinsky *Herrada Landsbergensis*; asi 1130 – 1195) byla z Alasaka
- Jeptiška a abatyše kláštera v Hohenburgu ve Vogézách
- Je známá jako autorka obrazové encyklopedie *Hortus deliciarum* (*Zahrada rozkoší*).



Aritmetické lano

- Aritmetické lano, nebo svázaný provaz, byl široce používaný **aritmetický nástroj ve středověku**, který byl používán k řešení řady matematických a geometrických problémů.
- **Aritmetické lano má obecně nejméně 13 uzlů** – proto se mu často říká lano se třinácti uzly - umístěné ve stejných intervalech.
- Další uzly byly prospěšné, zejména pro násobení a dělení.
- Ve středověké architektuře bylo vázané lano pro architekty nepostradatelné, protože umožňovalo konstrukci rovnostranných a pravoúhlých trojúhelníků i kruhů .
- Ve znázornění svobodných umění v *Hortus deliciarum* je **alegorie aritmetiky** ženská postava se svázaným provazem.
- **Aritmetické lano -**
https://cs.abcdef.wiki/wiki/Arithmetic_rope



Nejstarší použití symbolů pro sčítání a odčítání

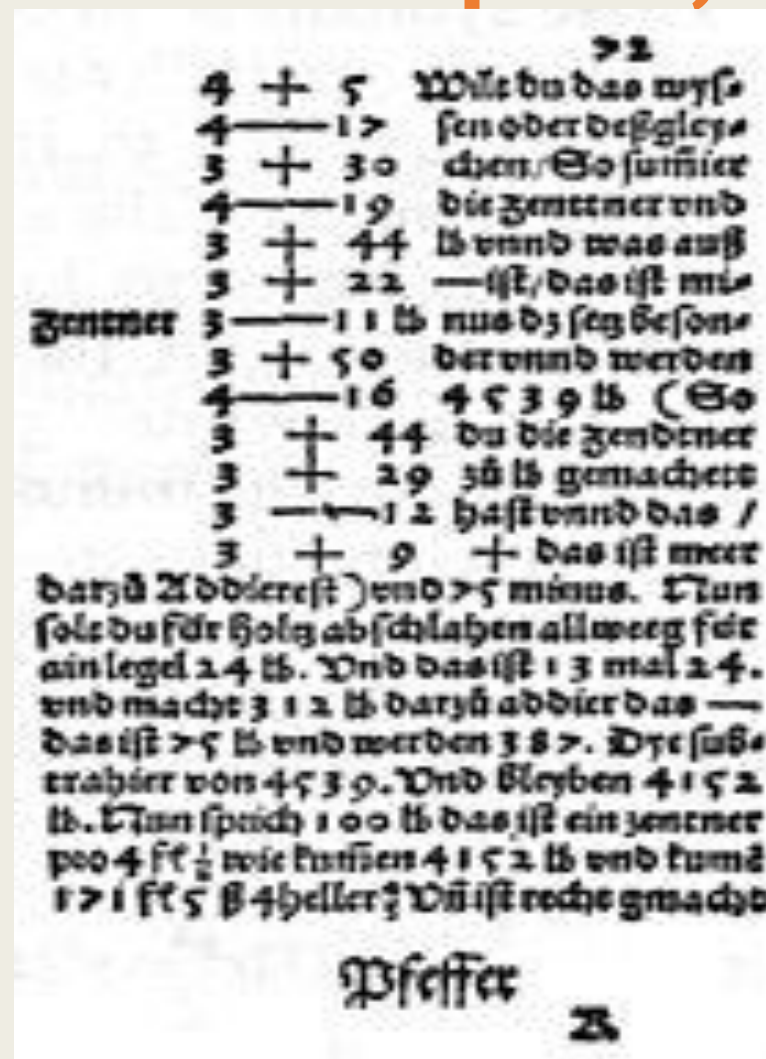
- **Plus (+) a mínus (-).**
Nicole d' Oresme (1323-1382) použil symbol, která vypadá jako symbol plus a zároveň jako zkratka pro latinské **et** (což znamená "a")
v díle ***Algorismus proportionum***,
o němž se předpokládá, že bylo napsáno mezi lety **1356 a 1361**.

**Symbol se objevuje v rukopise tohoto díla,
o kterém se předpokládá,
že byl napsán ve čtrnáctém století,
ale možná opisovačem a ne samotným Oresmem.**

**Symbol plus jako zkratka pro latinské *et*,
i když se objevuje s tahem dolů ne zcela svislým,
byl nalezen v rukopise z roku 1417.**

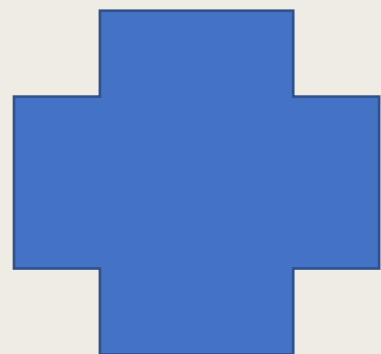
Johannes Widmann (kolem 1460 v Chebu – po 1498 Lipsko)

- Německý matematik z Chebu
- přispěl k vývoji symboliky.
- Použil symboly pro aritmetické operace sčítání a odčítání v tištěné učebnici
- „+“ a „-“
v knize „*Obchodní aritmetika*“
neboli
„*Behende und hüpsche Rechenung
auff allen Kauffmanschafft*“.
- Byla vydána v Lipsku v roce 1489.



To je více a to je méně ...

- Přebytky a schodky při obchodování
- Nejde o sčítání nebo odčítání
- $13 \times 24 = 312$ liber



72

4	+	5	Wie du das wisse
4	—	17	sen oder beßgleye
3	+	30	den. So sumier
4	—	19	die zentner und
3	+	44	lb und was auß
3	+	22	— ist, das ist mi-
zentner	3	—	nus d; sey beson-
3	+	50	der und werden
4	—	16	4539 lb (So
3	+	44	du die zentner
3	+	29	50 lb gemacht
3	—	12	hast und das /
3	+	9	+ das ist mit

darz addierst) und 75 minus. Thus
solc du für gold außtragen allweg für
ein legel 24 lb. Und das ist 13 mal 24.
und macht 312 lb darz addier das —
das ist 75 lb und werden 387. Dye sub-
trahier von 4539. Und bleyben 4152
lb. Man sprach 100 lb das ist ein zentner
poo 4 ft $\frac{1}{2}$ wie kuffen 4152 lb und kumt
171 ft 5 $\frac{1}{2}$ heller? Du ist roche gemacht

Wpffer

První použití znaků + a - v tisku

- **Stránka z prvního použití znaků + a – v tisku** ve Widmannově *Behennde vnd hüpsche Rechnung*. Tento snímek je převzat z augsburského vydání z roku 1526.
- Widmann napsal:

**„Znak: - ist / das ist minus ...
das + das ist mer.“**
- Napsal také **"4 centner + 5 pfund"** a **"5 centner - 17 pfund"**,
- čímž ukázal přebytek nebo nedostatek hmotnosti krabic nebo balíků.

Symbols + a - se poprvé v tisku

- Symbols + a - se poprvé objevily v tisku

v díle *Mercantile Arithmetic* nebo *Behende und hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafft* od Johanna Widmanna (narozen kolem roku 1460), publikovaného v Lipsku v roce 1489.

- Neodkazovaly však na sčítání nebo odčítání nebo na kladná či záporná čísla, ale **na přebytky a schodky** v obchodních problémech.

4·6 miteynader fact z 4 Nu n̄ i ganz
 von z 4 ist z 4 vnd $\frac{1}{4}$ von z 4 ist 6 vnd $\frac{1}{6}$
 von z 4 ist 4 Darnach addir die zusam
 men facit 3 4 secz also $\frac{z 4}{3 4}$ fact $\frac{1 z}{1 7}$ ma
 cht z z minut̄ $\frac{61}{1 7}$ vnd ist die zept

Schiff.



¶ In ef ging eyn
 schiff von Alkeper
 gen Cōstantinopl
 das hat 3 segel. und mit dē grost̄n segel
 ging es z menet mit dē andern 3. vñ mit
 dē kleust̄n 4 nu ist die frag Wē mā all 3
 segel auff gespāt vñ werdē doch in eynē
 wint In wie vil menet kom das schiff
 gen Constantinopl Nach̄ als vor sind
 eȳ zal in der du hast $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ vñ ist 12
 Nu $\frac{1}{2}$ vō 12 ist 6 vñ $\frac{1}{3}$ vō 12 ist 4 vñ $\frac{1}{4}$
 von 12 ist 3 Nu addir die zal zusam fa

et i 3 secz also $\frac{1 z}{1 3}$ eyn̄ metetz facit z 7
 tag 9 stund vnd ist recht.

Schuch.



¶ In ich kauff 9 par schuch p 1 fl vñ
 kaufft darnoch 12 par p 2 fl vñ die
 schuch der ich 12 par p 2 fl kaufft hab
 Der selbiḡn schuch wert mich 1 par len
 ger 4 tag dann der andern schuch 1 par.
 Nu ist die frag welche schuch passeler
 sind Nach̄ also Sprich 9 mol z 4 ist
 z 16 Darnach sprich 6 mol z 9 ist 17 4
 vñ also hastu gefunden

Hering



¶ In eyn̄er kaufft 1 tun
 hering die hat 1000 hering ye 4 p 1 gr
 vñ verkaufft wider 500 ye 5 p 1 gr vñ
 dye ander 500 ye 3 p 1 gr Nu ist dye
 frag ab der selbige gewinnē hab ad ver
 lozn Nach̄ vnd kumpt 16 gr $\frac{2}{3}$ gwinnē
 vnd ist recht **In gwer**

Úlohy

o lodi,

o botě
 (botách),

nebo
 o heryncích,
 tedy rybách.

Jiný výskyt symbolu +

- V rukopise z roku 1456, napsaném v Německu, se slovo *et* používá pro sčítání a je obecně psáno tak, že se velmi podobá symbolu +.
- *Et* se také nachází v mnoha dalších rukopisech, jako v "*5 et 7*" pro $5 + 7$, psaných ve stejné kontrakční formě, jako když píšeme ligaturu *&* rychle.
- Zdá se tedy, že není pochyb o tom, že toto znamení je pouze ligaturou pro *et*.

Widmannovo studium rukopisů v drážďanské knihovně

- Existují jasné důkazy, že jako přednášející na univerzitě v Lipsku studoval Widmann rukopisy v drážďanské knihovně, ve kterých + a – znamenají aritmetické operace, z nichž některé byly napsány již v roce 1486.
- Série poznámek z roku 1481, Widmannových poznámek obsahuje symboly + a - .
- Můžeme se ptát se, zda Widmann mohl tyto symboly zkopírovat od nějakého neznámého profesora na univerzitě v Lipsku?
- I studentské poznámky z jedné z Widmannových přednášek z roku 1486

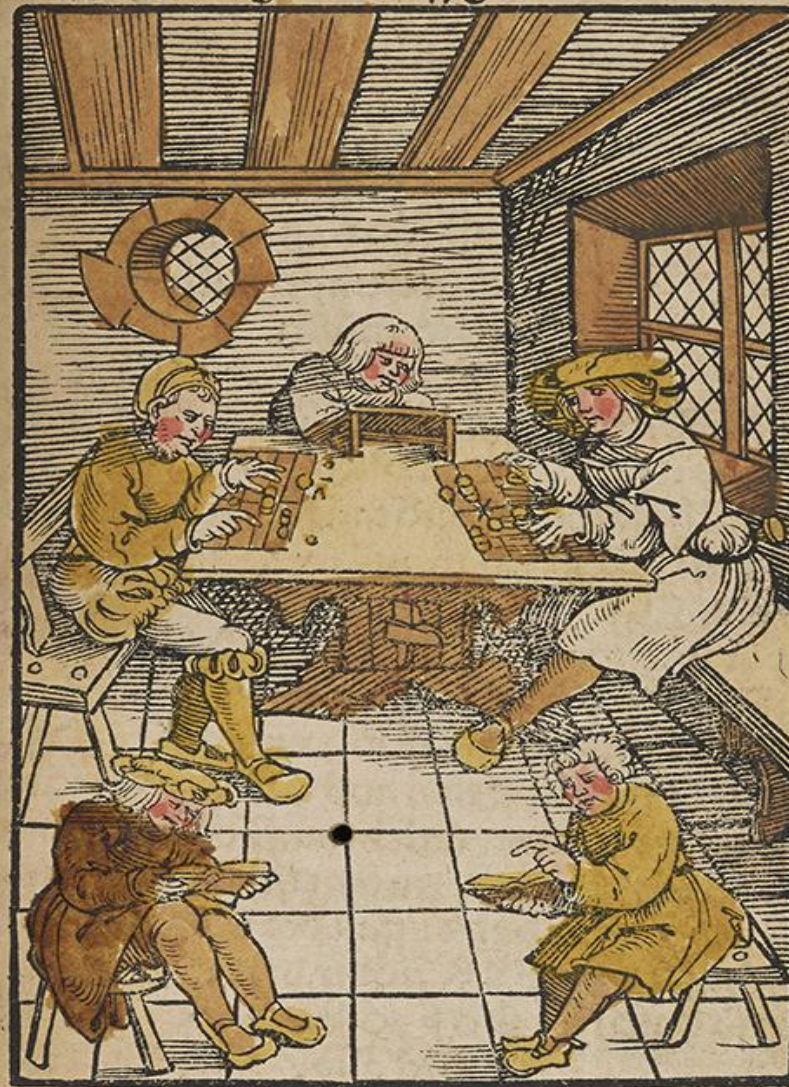
Na počátku 16. století

- **Giel Vander Hoecke** použil $+$ a $-$ jako symboly operace v díle *Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica*, publikovaném v Antverpách v roce **1514**.
- Vander Hoecke byl první osobou, která použila $+$ a $-$ při psaní algebraických výrazů.
- Je však možné, že inspiroval od Grammatea.
- **Henricus Grammateus** (také známý jako Henricus Scriptor a Heinrich Schreyber nebo Schreiber) publikoval aritmetiku a algebru s názvem *Ayn new Kunstlich Buech*, vytištěnou v roce **1518**, ve které použil $+$ a $-$ v technickém smyslu pro sčítání a odčítání (Cajori sv. 1, strana 131).

Heinrich Schreiber - Grammateus

- Vlašská (italská) praxe
ve výpočtech

Welsch practica auff alle kauff-
mansrechnung oder auffgab.

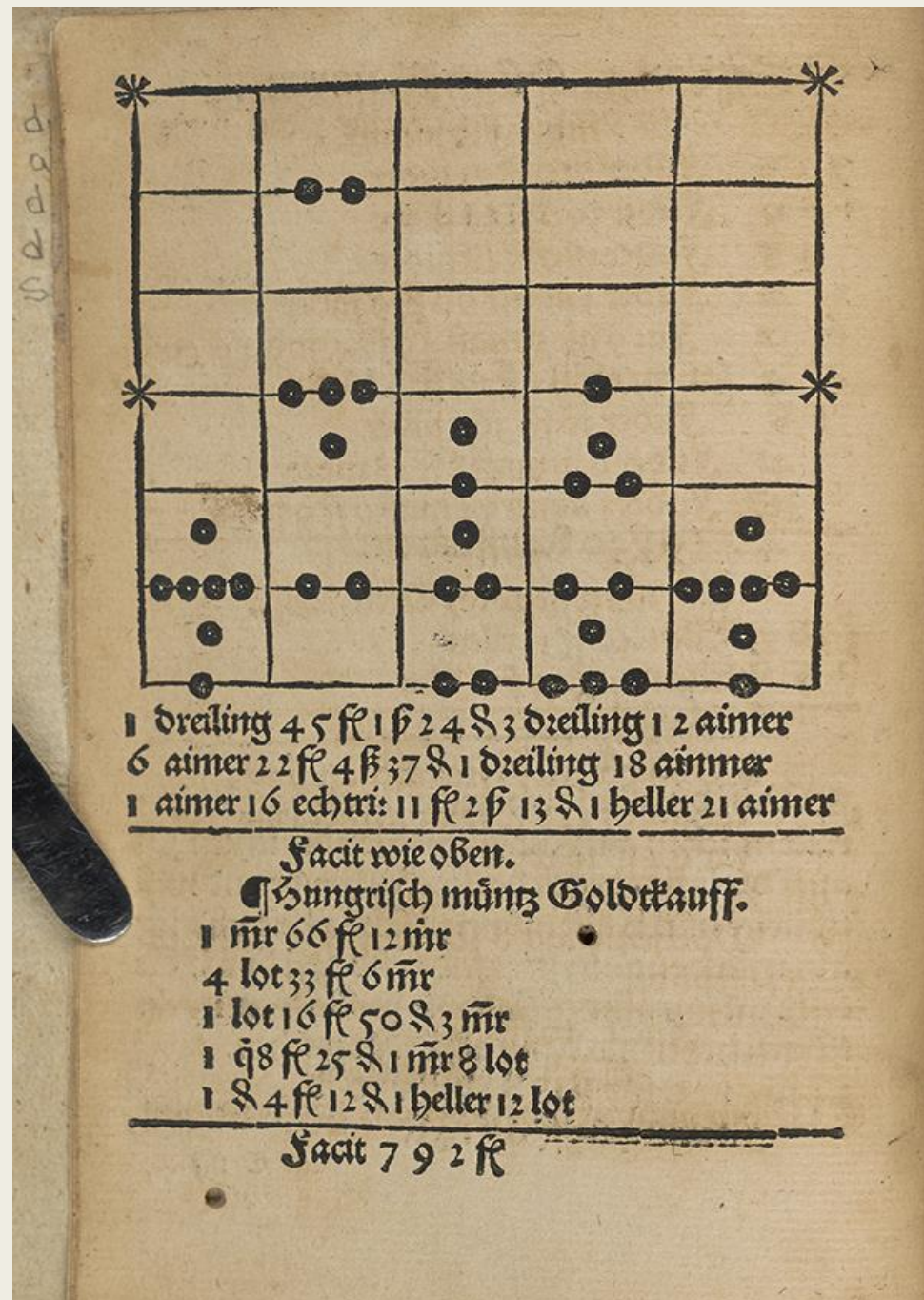


Zkusme to rozluštit!

■ Zleva:

96, 3520, 672, 1728, 96

Kde je chyba?



Heinrich Schreiber – Grammateus

- Měření sukna pomocí pravítka
- Zápisy – muž vpravo zapisuje
- Výpočty (231) – muž v popředí počítá na linách



Druhá polovina 16. století

– Robert Recorde

- Symboly plus a minus se v Anglii začaly obecně používat až poté, co je použil **Robert Recorde** v roce 1557

v díle *The Whetstone of Witte*.

:

- Symboly plus a minus se používaly dříve, než se objevily v tisku. Například byly natřeny na sudech, aby naznačovaly, zda jsou sudy plné nebo ne.
- Někteří se pokoušeli vystopovat symbol znaménka mínusu až k Heronovi z Alexandrie a Diofantovi.

Robert Recorde

1. $14. \text{℥} \cdot \text{---} | \text{---} \cdot 15. \text{℥} \text{---} \text{---} \text{---} = 71. \text{℥}.$
2. $20. \text{℥} \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \cdot 18. \text{℥} \text{---} \text{---} \text{---} = 102. \text{℥}.$
3. $26. \text{℥} \cdot \text{---} | \text{---} 10 \text{℥} \text{---} \text{---} = 9. \text{℥} \text{---} 10 \text{℥} \text{---} | \text{---} 213. \text{℥}.$
4. $19. \text{℥} \text{---} | \text{---} 192. \text{℥} \text{---} \text{---} = 10 \text{℥} \text{---} | \text{---} 108 \text{℥} \text{---} 19 \text{℥}$
5. $18. \text{℥} \text{---} | \text{---} 24. \text{℥} \cdot \text{---} \text{---} = 8. \text{℥} \cdot \text{---} | \text{---} 2. \text{℥}.$
6. $34 \text{℥} \text{---} \text{---} 12 \text{℥} \text{---} \text{---} = 40 \text{℥} \text{---} | \text{---} 480 \text{℥} \text{---} 9. \text{℥}$

Co víme o životních osudech Johanna Widmanna?

- **Johannes Widman** (jeho jméno je také psáno jako **Weideman** nebo **Wideman**)
- navštěvoval univerzitu v **Lipsku** a jeho jméno se objevuje na seznamu těch, kteří byli **zapsáni na zimní semestr roku 1480** jako \ **"Iohannes Weideman de Egra"**.
- **První titul získal v roce 1482** a pokračoval ve studiu na magisterském stupni, kde mu bylo dovoleno bydlet mimo kolej.
- **Magisterský titul byl udělen v roce 1485.**
- Poté vyučoval na univerzitě v Lipsku. **Přednášel o základech aritmetiky, výpočtech na přímkách a algebře.**
- **Jeho přednášky byly inzerovány a studenti byli pozváni, aby se zúčastnili.**

Přednášky
v Heidelbergu,
v Lipsku
a dalších
univerzitách
ve středověku



Zápisky studenta

- **Widmanova přednáška o algebře z roku 1486 je první,** která byla v Německu na toto téma přednesena, a překvapivě stále přežívá v zápisníku studenta, který se přednášek zúčastnil.
- Widman použil **cosistickou notaci**, jak bylo v té době obvyklé, když diskutoval o 24 různých typech rovnic. Tento přístup byl tehdy neobvyklý v tom, že obsahoval symboly pro sčítání, odčítání a odmocniny.
- Widmann považoval **výpočty s iracionálními čísly a polynomy za součást algebry.**
- a připravoval své studenty na to tím, že je nejprve seznámil **se zlomky a proporcemi.**

Čím se tedy Widmann proslavil?

- Widmann je však nejlépe připomínán pro ranou aritmetickou knihu *Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmanschafft*, vydanou v němčině v roce **1489**. Tato kniha se proslavila, protože obsahuje první vzhled + a - znaků pro sčítání a odčítání.
- Je to raný příklad tištěné aritmetické knihy a je lepší než ty před ní, protože má více příkladů a také širší škálu užitečných příkladů.
- Kniha se skládá ze tří částí:
 1. První část je o počítání s celými čísly,
 2. druhá je o proporcích,
 3. třetí část je o geometrii.

Popularita Widmannovy knihy

- Popularita Widmannovy knihy je patrná ze skutečnosti, že byla přetištěna v roce 1508 v **Pforzheimu**, v roce 1519 v **Hagenau** a v roce 1526 v **Augsburgu**.
- Všimněte si také, že přetisk na několika různých místech naznačuje, že byl populární ve velké části německy mluvícího světa.
- Po roce 1526 bylo dílo nahrazeno aritmetickou knihou **Adama Riese** a poté dalšími díly jiných autorů.

Další životní osudy

- Neexistují žádné přímé zmínky o Widmanovi po roce 1489, ale předpokládá se, že ještě v roce **1498** pracoval na matematických tématech. Ve skutečnosti mezi historiky existuje diskuse, zda **Widman zůstal v Annabergu kolem roku 1500**, což by bylo důležité, protože v té době tam žil **Adam Ries**.
- Widman byl pravděpodobně autorem knihy *Algorithmus Linealis* vydané v Lipsku v roce **1489**. Tato kniha je nejstarším tištěným dílem obsahujícím návod na počítání pomocí počítadla.

Widmanův význam spočívá v tom, že poskytl jednu z prvních praktických aplikací matematických znalostí, které byly díky vynálezu tisku zpřístupněny mnohem širšímu okruhu čtenářů, než kdy předtím.

Widmannovi vrstevníci

S kým se mohl potkat?

- Luca Pacioli
- Leonardo Vinci
- Albrecht Dürer
- Johannes Werner
- Nicolaus Kopernik
- Adam Ries,
- Francesco Maurolico,
- Tartaglia (Koktal) a Cardano ...

Adam Ries, Annaberg

Rechenbüchlin

Mach die lügen zu theilen/steht wie hie:

$$\begin{array}{r} 6 \quad \text{---} \quad 180 \\ 45 \\ 12 \quad \text{---} \quad 135 \end{array}$$

Rechen es/ so kommen 30. fl. so viel hat er ge-
habt.

Item/ gib mir ein zahl? so ich der selben $\frac{5}{7}$ hin-
weg nimb/ zum vberbleibenden ein viertheil der
ersten zahl/ addir das 7. kommen/ Setz die Zahl:
setz 24. nimb darvon $\frac{5}{7}$ als 20. bleiben 4. vnd ad-
dir darzu ein viertheil der ersten Zahl/ als 6. wer-
den 10. solten 7. seyn/ leugt zu viel 3. Setz der-
halben die Zahl sey 11. Examinir wie jetzt/ steht
also:

$$\begin{array}{r} 24 \quad + \quad 3 \\ 12 \quad \text{---} \quad 2 \end{array}$$

Machs/ so kommen 16. vnd $\frac{7}{7}$.

Item/ zween wollen ein Pferd kauffen/ als
A. vnd B. vor 15. fl. Spricht A. zum B. gib mir
deins Gelds ein drittheil/ so wil ich meins darzu
thun/ vnd das Pferd bezahlen: Spricht B.
zum A. gib mir von deinem Geld ein viertheil/ so
wil ich mit meinem gelt hinzu gethan das pferd
bezahlen. Nun frage ich/ wie viel jeglicher in-
sonderheit Gelds hab? Setze dem A. 12. Gül-
den/ gebrechen ihm an der Bezahlung 3. flo. wel-
che den drittentheil vom B. machen/ also muß
B. 9.

Adam Risen.

62

B. 9. haben. Examinir die also/ Sprich: der
drittheil von B. sind 3 zu 12. des A. addir/ kom-
men 15. bezahlung des Pferdes/ Nun wil B.
vom A. den vierden theil haben/ als 3. fl. addir 3.
zu 9. werden 12. leugt zu wenig 3. Setz derhalben
A. hab 8. muß B. 21. haben. Examinir auch/ leugt
zu viel 8. vnd steht also:

$$\begin{array}{r} A \quad B. \\ 12 \quad 9 \quad \text{---} \quad 3 \\ 8 \quad 21 \quad + \quad 8 \\ 11 \end{array}$$

Rechen dem A. sein gelt zum ersten/ kommen
10. fl. vnd $\frac{10}{17}$ theil. das nach dem B. werden
12 $\frac{2}{17}$ fl.

Item/ zween wollen ein Haus vor 39. fl. kauf-
fen A. wil vom B. $\frac{2}{7}$ vnd B. vom A. $\frac{2}{7}$ haben/
Die frag/ wie viel ein jeder insonderheit gehabe
hab? Setz A. hab 36 flor. gehabt/ also gebrechen
ihm 3. an der bezahlung/ welche zwey drittheil
vom B. gelt machen Such derhalben dem
gansen Theil des B. Sprich/ 2. gib 3. was geben
3. Facit 4. vnd $\frac{1}{7}$ Examinir also/ Sprich:
zwey drittheil vom B. sind 3. gib zum A. wer-
den 39. Nun sprich: drey viertheil vom A. sind
27. die gib zum B. werden 31. flor. ein zwey theil/
leugt zu wenig 7. fl. ein zwey theil. Setz derhalben
A. hab 32. muß B. 10. Gulden vnd ein zwey-
theil

