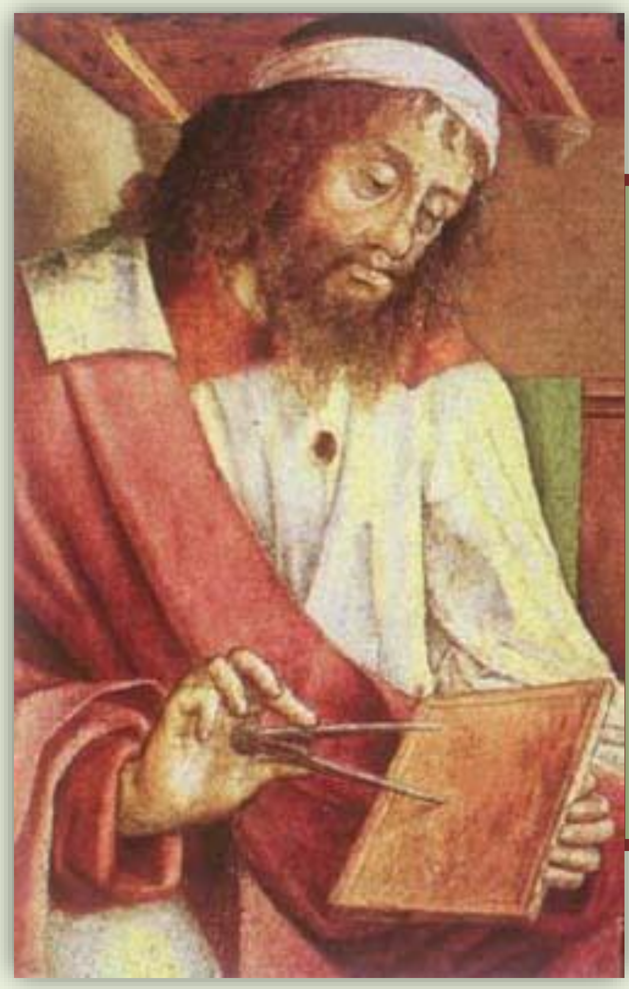


Po stopách Eukleidova algoritmu HMI

Alena Šolcová
Katedra aplikované matematiky
FIT ČVUT v Praze

2022

EA - prototyp algoritmického postupu

Eukleidův algoritmus je pro matematiky tradičně prototyp algoritmického postupu.

Objevuje se nejen při **hledání NSD** **(GCD),**
ale take při **řešení neurčitých rovnic**
(**Bézoutova identita**),
také ve **Sturmově metodě při** **hledání počtu reálných kořenů algebraických rovnic**.

Nejstarší použití EA

- Explicitní vyjádření algoritmu před Eukleidem dosud nebylo nenalezeno.
- **Aristarchos ze Samu,** 3. st. př.n.l.

  O velikostech a vzdálenostech Slunce a Měsíce

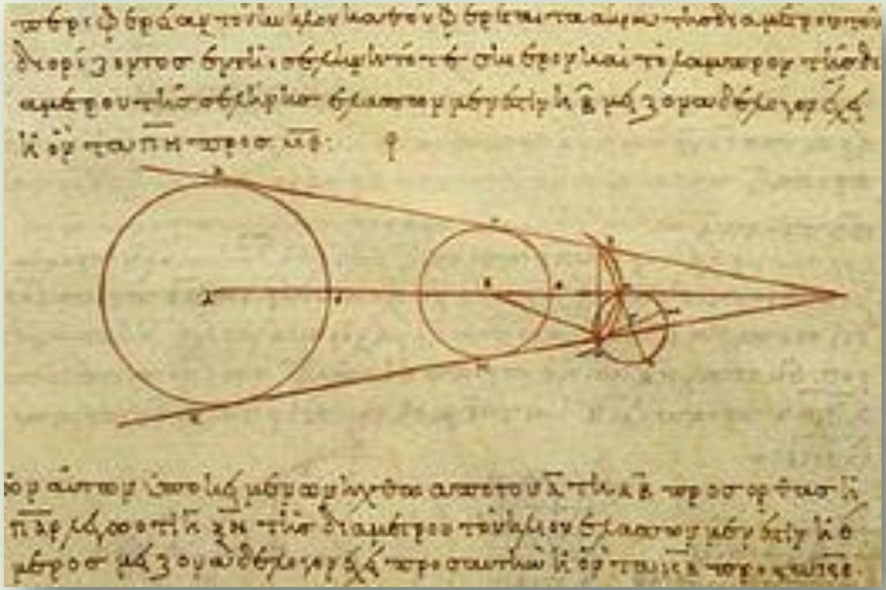
  Aristarchos použil EA dvakrát
  a uvádí poměry, které nahradil jinými podle EA.
- Později **Archimédés,** +212 př. n. l.

  EA používá konkrétně ve 3 aproximacích.
- EA souvisí také s metodou anthyphairesis,

  kterou již užívali v **Platónově Akademii.**

Aristarchos (310 – 230 př. n. l.)

- je žákem **Stratóna z Lampsaku**,
- ovlivněn pýthagorejcem **Philoláem z Krotónu**,
- citován Archimédem ve spisu ***Počítání písku***
- odhadl vzdálenost Měsíce



Aristarchos II

- 71 755 875 : 61 735 500

  → 43 : 37

- 7921 : 4050

  → 88 : 45

Rekonstrukce Aristarchova postupu

- Nechť A = 71 755 875   B = 61 735 500

A – B   = C … … 10 020 375

B – 6C = D … …   1 613 250

C – 6D = 340 875

____

C = 6D, B = 6C + D = 37D

A = B + C = 43 D, tedy A : B = 43 : 37

Rekonstrukce Aristarchova postupu II

- Teprve v 17. stol. byl tento postup spojen s řetězovými zlomky.
- Pokračujme v předcházejícím příkladu:

D = 1 613 250 a E = 340 875

D – 4E = F … 249 750

E – F = G … 91 125

F – 2G = H … 67 500

G – H = I … 23 625

H - 2I = J … 20 250

I – J = K … 3 375

J – 6K = 0

NSD (A, B) = K = 3 375

Pocta Aristarchovi

Riccioli , 17. století

Archimédés (287 -212 př. n. l.)

- Archimédés: *Měření kruhu*

  6336 : (2017 + ¼) → 3 + 10/71 (= 223 : 71)

  Poměr obvodu kruhu k průměru je

  menší než (3 + 1/7) a větší než (3 + 10/71).

  $3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71.$

Archimédés II

- Vepisuje do kruhu *n*-úhelníky:

6-úhelník	$6 \, . \, 153/265$	$< \; 3{,}47$
12-úhelník	$12 \, . \, 153/571$	$< \; 3{,}22$
24-úhelník	$24 \, . \, 153/(1161 + 1/8)$	$< \; 3{,}16$
48-úhelník	$48 \, . \, 153/(2334 + \frac{1}{4})$	$< \; 3{,}147$
96-úhelník	$96 \, . \, 153/(4673 + \frac{1}{2})$	$< \; 3 + 1/7$

VII. kniha Eukleidových Základů

- Dva výroky o EA lze najít v VII. knize Eukleidových Základů:
- Prop.1: O tom, kdy jsou dvě čísla vzájemně nesoudělná: *Jsou-li dána dvě čísla nestejná a odčítá-li se střídavě vždy menší od většího, když zbývající předcházejícího nikdy nedoměřuje, dokud nezbude jednotka, počáteční čísla budou navzájem kmenná.*
- Prop.2: O určení největšího společného dělitele: *Jsou-li dána dvě čísla navzájem nekmenná, najdi největší jejich společnou míru.* (Překlad Františka Servíta z roku 1907.)
- To je nejdůležitější místo v Základech a odtud EA lze obecně odvodit!

Nový překlad, 2011

- Řecké matematické texty, Oikoymenh, Praha 2011, str. 190-194:
- Kniha VII, Prop. 1: *Jsou dána dvě nestejně velká čísla a odebírejme střídavě a opakovaně menší od většího. Pokud nikdy nedojde k tomu, že by zbývajícím číslem bylo měřeno číslo z předchozího kroku, dříve než dospěje k jednotce, pak čísla daná na počátku jsou nesoudělná.*
- Kniha VII, Prop. 2: *Jsou dána dvě čísla, která nejsou nesoudělná, a máme nalézt jejich největší společnou míru.*

Eukleidovy Základy, Kniha X.

- Prop. 2: *Jestliže se ze dvou daných nestejně velkých veličin odebírá střídavě a opakovaně vždy ta menší od té větší, přičemž zbytek nikdy neměří předchozí zbytek, pak jsou tyto veličiny nesouměřitelné.*

ŘMT, str. 214 -215

- Prop. 3:

Jsou-li dány dvě veličiny souměřitelné, najdi jejich míru. Servít, str. 160 - 161

V. kniha Eukleidových Základů

Pak je tu ještě jedna větev, vycházející z V. knihy Eukleidových Základů.

Prop. 5: ***Když jest veličina veličiny stejným násobkem jako část odečtená odečtené, též zbytek zbytku bude stejným násobkem, jakým čísla celá.***

- Jde zde o porovnávání poměrů,

na to navázal arabský matematik al-Chajjám

(přepis bývá různý, např. al-Khayyam)

a v 9. stol. al-Mahani.

Isa Al-Mahani (820–880),

- Perský matematik a astronom, který v letech 853 - 866 zaznamenal řadu pozorování měsíčních a slunečních zatmění a konjunkce planet.
- Komentoval Eukleidova a Archimédova díla. Zdokonalil překlad Menelaovy Sfériky.
- Pokusil se řešit tzv. Archimédův problém: Rozdělit kouli rovinou na dvě části v daném poměru objemu. Řešení vede ke kubické rovnici

$$x^3 + c^2 . b = c . x^2$$

Muslimští matematici ji nazývají **al-Mahaniho rovnicí.**

Přesnost Mahaniho výpočtů

- Ibn Yunus:

„Počítal s astrolábem počátky měsíčních zatmění a po třech po sobě následujících zatměních se zmýlil pouze o hodinu a půl.“

- Al- Mahani napsal také práci,

kde dokazuje **26 problémů sporem.**

- Motivaci k zájmu o matematiku

čerpal převážně z astronomie.

Bézoutova identita

Celočíselné řešení x_0, y_0 lineární rovnice

$$ax - by = c,$$

existuje vždy a splňuje Bézoutovu identitu

$$ax_0 - by_0 = 1.$$

- To ovšem neobjevil Bézout, ale

  Bachet de Méziriac v roce 1624.

Bézout podobné vysvětlení uvádí až ve 3. části svého *Kursu matematiky* v roce 1766.

Étienne Bézout (1730 – 1783)

- francouzský matematik
- *Théorie générale des équations algébriques*, Paříž 1779
- teorie eliminace a symetrických funkcí kořenů rovnic

- **Používal determinanty** již **v roce 1764,** nevyložil jejich obecnou teorii.

Příklad

- **Cours d' Algebre, 1766**

  Řeší úlohu: $17x - 11y = 542$

$y = (17x - 542)/11 = (17x - 98.11)/11$

$= (17x/11) - 98$

$y = x - 49 + (6x - 3)/11$ a $6x - 3 = 11u$,

hledáme celé číslo x, tedy $x = (11u + 3)/6.$

$x = 39 + 11$

$50 + 11$

$61 + 11$

etc.

$y = 11 + 17$

$28 + 17$

etc.

Bézoutova identita:

$2.17 - 3.11 = 1$

Claude Gaspard Bachet de Méziriac

- 1581 – 1638
- Bachet byl první

  v Evropě, který se zabýval řešením neurčitých rovnic pomocí řetězových zlomků.
- Zabýval se teorií čísel, nalezl např. metodu konstrukce magických čtverců.
- Je považován za autora Bézoutovy identity.

Řetězové zlomky

- **Aristarchos ze Samu**, **Archimédés**,
- **Fibonacci** – aproximace tzv. zlatého řezu

  v *Liber abaci*, 1202,

  Bombelli - aproximace druhé odmocniny

  v jeho spisu *Algebra*, 1572 , **Cataldi** - *Trattato*, 1613.
- **Počátek těchto úvah: X. kniha Eukleidových Základů** - v pojednání o nesouměřitelných veličinách, v Prop. 2 počátek těchto úvah.

Řetězové zlomky II

- Brahmagupta (598 - 670) byl první, který vyjádřil, že **řetězový zlomek není zobrazení** – je to ***limita* posloupnosti zobrazení.**
- Pak se řetězovým zlomkům věnovali již nám známí Arabové - al-Mahani, 9. stol., a al-Chajjam, 12. stol.
- Nakonec přejdeme do Anglie:

lord Brouncker našel formuli pro 4/pi
a tuto formuli citoval **John Wallis**
ve svém díle ***Arithmetica infinitorum.***

-

Euclid's algorithm, mathematics and music

Benjamin Wardhaugh, Plus Magazine,

Issue 40, September 2006

A little while ago I was reading some letters written by the 17th century German mathematician Gottfried Leibniz to an obscure contemporary of his, **Conrad Henfling**. The letters were about music theory and the details of how to tune musical instruments. I was surprised to find that at one point Henfling started to use Euclid's algorithm to justify his musical reasoning.

- How useful could a mathematical technique from the third century BC be to a 17th-century musician? Very useful indeed, it turns out. Euclid's algorithm provides a way of dealing with equations of musical pitch, potentially helping musicians and instrument makers to tune musical instruments.

Interval hudební a matematický

Interval mezi oktávou a kvintou

poměr $a - n \times b = c$, kde $b > c$

- oktáva - kvinta = kvarta $2:1 \,/\, 3:2 = 4:3$ (1)
- kvinta - kvarta = tón $3:2 \,/\, 4:3 = 9:8$ (2)
- kvarta - 2 tóny = půltón
  (např. E k F) $4:3 \,/\, (9:8)^2 = 256:243$ (3)
- tón - 2 půltóny = komma

$$9:8 \,/\, (256:243)^2 = 531441:524288 \quad (4)$$

Jaká je vhodná aproximace kvinty v oktávě?

Interval	Poměr
• půltón - 3 kommy = 'X '	$256:243/(531441:524288)^3 = (2^8:3^5) / (3^{12} : 2^{19})^3 = 2^{65} : 3^{41}$
• komma - 'X' = 'Y'	$(3^{12} : 2^{19}) / (2^{65} : 3^{41}) = 3^{53} : 2^{84}$
• 'X' - 5'Y' = 'Z'	$(2^{65} : 3^{41}) / (3^{53} : 2^{84})^5 = 2^{485} : 3^{306}$ (>1}

Jaká je vhodná aproximace kvinty v oktávě?

Mohli bychom pokračovat dále nekonečněkrát (ln 4/3 - irac.).

Předpokládejme, že tón - 2 půltóny = 0

Potom **1 tón = 2 půltóny** (5)

kvarta = 2 tóny + 1 půltón (podle 3) = 5 půltónů (podle 5) (6)

kvinta = kvarta + tón (podle 2) = 7 půltónů (podle 5 a 6) (7)

oktáva = kvinta + kvarta (podle 1) = 12 půltónů (podle 5 a 7) (8)

Tedy Eukleidův algoritmus nám pomůže v tom, že můžeme zdůvodnit, že skutečně používaná aproximace kvinty v oktávě **7/12 je optimální (při zanedbání kommy)**, protože kvinta je přibližně 7 půltónů a oktáva jich má asi 12 .

Další krok

- tón = půltón^2 . komma .... $T = P^2 . K$
- kvarta ... □ □ $= T^2P = K^2 . P^5$
- kvinta ... Q $Q = □ . T = K^3 . P^7$
- oktáva (diapazon) ... D $D = □ . Q = K^5 . P^{12}$

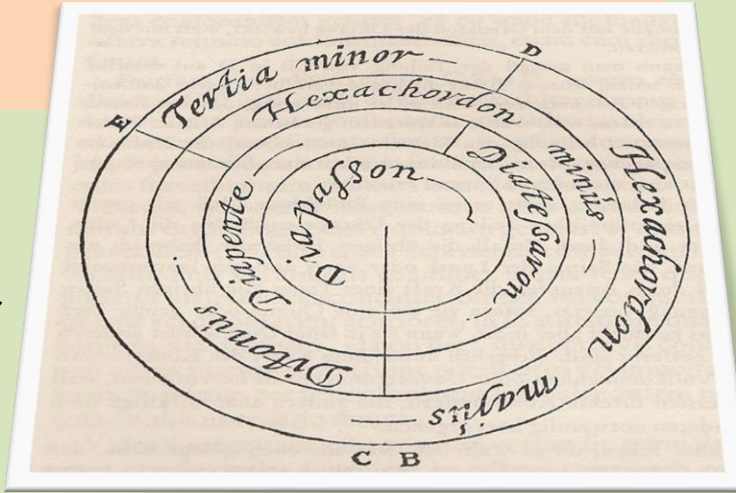
DNES:

- **Temperované ladění používá pro půltón 12. odmocninu ze dvou.**
- Kvinta pak je $2^{7/12}$ (poměr frekvencí).
- **Oktáva je přesná, tj. přesně 2.**

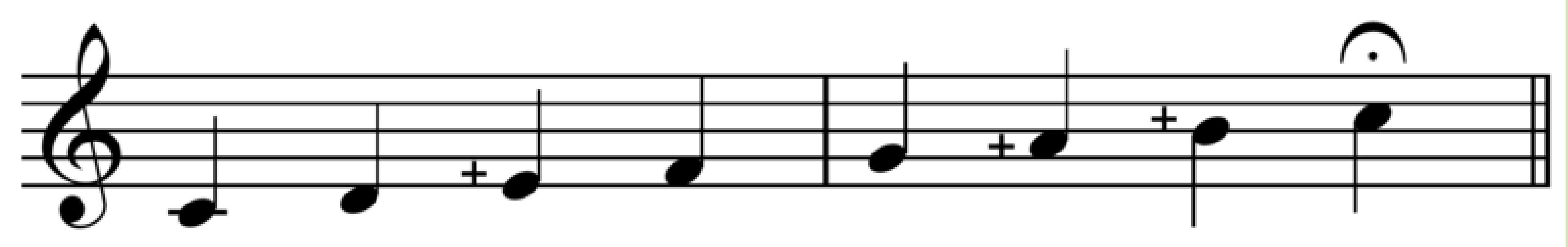
Lord William Brouncker (1620 -1684)

- Irský matematik a hudebník, zakladatel a první president Královské společnosti v Londýně. Loyální royalista. Zabýval se řetězovými zlomky a počítal logaritmy pomocí nekonečných řad. Od 16 let studoval v Oxfordu. Doktorem medicíny (fyziky) se stal v roce 1647.
- Navrhoval tvar lodí, například navrhl tvar jachty pro Karla II. Dopisoval si s Johnem Wallisem.

William Brouncker II



- Brouncker našel obsah části rovnoosé hyperboly pomocí součtu určité řady.
- Přeložil Descartovo *Hudební kompendium*, 1653, a **našel nové rozdělení diapasonu na 17 stejných půltónů.**



John Wallis (1616 – 1703)

- Anglický matematik, který se podílel na vývoji infinitezimálního počtu.
- Mezi roky 1643 a 1689 pracoval jako kryptograf pro parlament Spojeného králov-ství a později pro královský dvůr.
- Také zavedl symbol ∞ pro nekonečno.

Byla po něm pojmenována planetka 31 982 Johnwallis.

Kryptografie ve Wallisově době

- Kryptografie nebyla v té době na moc dobré úrovni. Navzdory individuálním úspěchům matematiků, mezi které patřil např. **François Viète**, nebyly principy návrhu a analýzy šifer moc dobře pochopeny.
- **Většina cifer závisela na tajném algoritmu namísto proměnlivého klíče**.
- **Wallis** si uvědomil,
  že **druhá možnost je mnohem bezpečnější**.

Wallis - kalkulátor

- Studoval v Cambridge.
- Od roku 1649 profesorem geometrie v Oxfordu, předtím určitou dobu knězem.
- Wallisova mimořádná matematická schopnost – **počítat zpaměti.**
  Špatně spal, často si počítal a v noci vstával.
  Jednou v noci spočítal z hlavy druhou **odmocninu čísla s 53 ciframi** a ráno diktoval výsledek zpaměti **– 27-ciferné číslo.**

Aplikace řetězových zlomků a EA

- Také Christian Huygens použil řetězové zlomky, kdy počítal počet zubů pro konstrukci planetaria (1682), *De automato planetario.*
- Astronomové vůbec ve svých výpočtech potřebovali často EA.

$$x = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}$$

Christian Huygens (1629 – 1695)

- Huygensův princip
- kyvadlové hodiny
- základy integrálního počtu
- kvadratura kruhu atd.

- Software Huygens
- Sonda Huygens
- Hora na Měsíci, kráter na Marsu, planetka 2801

Model sluneční soustavy

Tehdy byl známý

poměr oběžných dob Saturnu a Země kolem Slunce 29, 43 : 1

Huygens hledal vhodnou aproximaci a

zvolil počet zubů v poměru **206 : 7** = 29, 4285

1. aprox.: 29, 43 ≈ 29 + 1 / (2 + …) = 59/2
2. aprox.: ≈ 29 + 1 / (2 + 1/(3 + …)) = **206/7**
3. aprox.: ≈ 29+1/(2+1/(3+1/14)))=2943/100

18. a 19. století

- Nakonec bychom se mohli věnovat pracem Eulera, Lagrange a Sturma, speciálně čínským matematikům.
- České práce prvního profesora matematiky v češtině **Františka Josefa Studničky** (1836 – 1903) o řetězových zlomcích a teorii čísel jsou přístupné v **České digitální knihovně.**

Leonhard Euler (1707 – 1783)

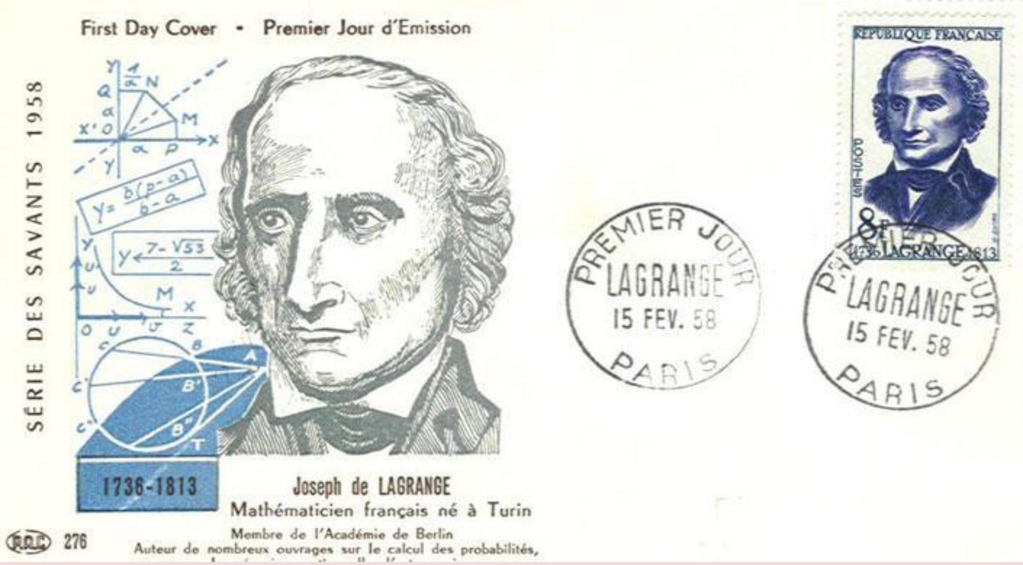
- Vytvořil analytickou teorii řetězových zlomků.
- Vyjádřil s jejich pomocí transcendentní funkce.
- **1748 Leonhard Euler,**
  Introductio in analysin infinitorum,
  Vol. I, Chapter 18.
- Otázka konvergence nekonečného řetězového zlomku je analogická
  konstrukci iracionálního čísla jako limity
  Cauchyho posloupnosti racionálních čísel.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

- **Použil řetězové zlomky k nalezení obecného řešení** **Pellovy rovnice**.

$$x^2 - n\, y^2 = 1$$

- Počet kořenů rovnice – otázku formuloval **René Descartes** ve svém díle ***„Géometrie“***, 1637



- **Kaskádová metoda – Lagrangeův název pro řetězové zlomky**

Jacques Charles François Sturm

- 1803 Ženeva – 1855 Paříž
- Vychovatel syna
  Mme de Stael

  a syna astronoma **Araga,**
- **profesor**
  l'Ecole polytechnique

  a pařížské univerzity.

Sturmova metoda

- $Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$

- $V = 0$

  $V = V_1Q_1 - V_2$

  $V_1 = V_2Q_2 - V_3$

  …

- $V_{r-2} = V_{r-1}Q_{r-1} - V_r$

Donald Knuth a 20. století

- Donald Knuth (nar. 10. 1. 1938)

„Počínaje rokem 1950

je slovo

algoritmus

*spojeno s **Eukleidovým algoritmem**.“*

1. díl slavného

The Art of Computer Programming